目　　录

第一章　引　　論

設 X, Y 是两个弧式連通的豪斯道夫 (Hausdorff) 空間，并且考慮映 X 到 Y 的映象(即連續变換)．如果存在一个映象 $F: X \times \times I \to Y$，其中 I 是单位区間 $0 \leqslant t \leqslant 1$，使得对于所有的 $x \in X$ 有 $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x)$，則我們說 $f_0, f_1: X \to Y$ 是同伦的．这也可用另一种說法来同样地表示，即存在一个連續映象族 $f_t: X \to Y$，不过应該注意这时的連續性是同时对于 $x \in X$ 和 $t \in I$ 的．如果 f_0 同伦于 f_1，我們写作 $f_0 \sim f_1: X \to Y$，或在不致引起誤会的地方，就只写作 $f_0 \sim f_1$．

假定在 f_0 和 f_1 下，某一个子集 $X_0 \subset X$ 映入 $Y_0 \subset Y$．这时我們写作 $f_0, f_1: X, X_0 \to Y, Y_0$．如果要求对于 f_0 到 f_1 的变形，X_0 的象始終包含在 Y_0 內，我們便約束了同伦．若 f_0 是在这样的变形下同伦于 f_1，就記作

$$f_0 \sim f_1: X, X_0 \to Y, Y_0.$$

我們可以考慮这种同伦，在这样的同伦下，X 的某一个子集的象对它的各点保持不动，如果 $f_0, f_1: X \to Y$，并且对于某一个 $X_0 \subset X$ 有[1] $f_0 | X_0 = f_1 | X_0$，假如存在一个映象 $F: X \times I \to Y$，使得 $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x)$, $x \in X$; $F(x_0, t) = f_0(x_0)$, $x_0 \in X_0$, $t \in I$，我們就把它記作 $f_0 \sim f_1: X \to Y$, rel X_0，或簡略地記作 $f_0 \sim f_1$, rel X_0．

現在来証明一个构造連續函数的基本引理．

引理 1.1. 設空間 X 是兩个閉子空間 A 与 B 的并集．又設 $f: A \to Y$, $g: B \to Y$ 这兩个映象使得

$$f | A \cap B = g | A \cap B.$$

1) 記号 $f|X_0$，其中 f 是一个 $X \to Y$ 的映象且 $X_0 \subset X$，意即由 $f'(x_0) = f(x_0)$, $x_0 \in X_0$，給定的映象 $f': X_0 \to Y$．我們称 $f|X_0$ 是 f 对 X_0 的約束映象．

这时由 $h|A=f, h|B=g$ 所給出的映象 $h: X\to Y$ 是連續的.

設 F 是 Y 的任意一个閉集. 这时显然有

$$h^{-1}(F)=f^{-1}(F)\cup g^{-1}(F).$$

由于 f 是連續的, $f^{-1}(F)$ 在 A 內是閉的, 但 A 在 X 內是閉的, 所以 $f^{-1}(F)$ 在 X 內是閉的. 同样, $g^{-1}(F)$ 在 X 內也是閉的, 于是 $h^{-1}(F)$ 是 X 中的閉集, 因而 h 是連續的.

定理 1.2. 关係

$$f_0\sim f_1: X\to Y,\quad f_0\sim f_1: X, X_0\to Y, Y_0,$$
$$f_0\sim f_1: X\to Y, \text{rel } X_0.$$

的每一个都是等价关係.

这些关系显然是对称的和自反的. 我們来証明传递性. 設 $f'\sim f'': X\to Y$, $f''\sim f''': X\to Y$. 这时有 $F_1: X\times I\to Y$, $F_2: X\times I\to Y$, 使得

$$F_1(x,0)=f'(x),\quad F_1(x,1)=F_2(x,0)=f''(x),$$
$$F_2(x,1)=f'''(x).$$

定义 $F: X\times I\to Y$ 为

$$F(x,t)=F_1(x,2t),\qquad 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2},$$
$$=F_2(x,2t-1),\quad \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.$$

由引理 1.1, F 是連續的, 而它显然是 f' 与 f''' 間的一个同伦. 此外, 如果 F_1 和 F_2 是約束的, 那末 F 也同样是約束的.

定理 1.2 使我們可以将 X 到 Y 的映象, 或 X 到 Y 的約束映象分成一些**同伦类**. 同伦論的中心問題就是用 X 以及 Y 的拓扑不变量[1]来表出由 X 到 Y 的映象所分成的同伦类的集合的性質.

設 $f: X\to Y$ 是一个使得 $f(X)$ 成为 Y 中的一个点的映象. 这时我們称 f 是一个**常值映象**. 由于 Y 是弧式連通的, 任意两个常值映象都是同伦的, 因此可以归入一个常值映象类.

1) 設 X', Y' 分別同胚于 X, Y, 則映象 $X\to Y$ 的同伦类显然可以使它一一对应于映象 $X'\to Y'$ 的同伦类.

定理 1.3. 設 E^n 是一个 n 維体素(一个与 n 維歐幾里得空間的球的內部和边界的同胚像). 这时任何映 E^n 入 Y 的映象都同伦于常値映象.

設 E^n 被取作是 n 維空間內中心在原点的单位实心球. 这时 E^n 內的任意一个点可以表成 λx, 其中 $x \in S^{n-1}$, S^{n-1} 是 E^n 的面, 且 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. 定义 $F: E^n \times I \to Y$ 是 $F(\lambda x, t) = f((1-t)\lambda x)$, 其中 $f: E^n \to Y$ 是任意的映象. 于是 $F(\lambda x, 0) = f(\lambda x)$ 且 $F(\lambda x, 1) = f(0)$, 其中 0 就是原点. 自然, 这里我們所要用到的最重要的事实是: E^n 本身可以縮成一点.

为了說明上面这一定理并不是空的, 这里我們指出圓周到它本身的恆等映象就不同伦于常値映象. 事实上, 存在着圓周到它自身的可数无穷多个映象类[1].

設 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ 使得 $gf: X \to X$, $fg: X \to Y$ 都与适当的恆等映象同伦. 这时我們就說 X 和 Y 具有相同的同伦型, 并且称 f 与 g 是同伦等价, $g(f)$ 是 $f(g)$ 的同伦逆. 我們把任意一个空間到它自身的恆等映象記作 1, 因此就有 $gf \sim 1$, $fg \sim 1$. 如果 X 和 Y 具有相同的同伦型, 我們就記作 $X \sim Y$.

定理 1.4. 关係 $X \sim Y$ 是一个等价关係.

这一个关系显然是对称的和自反的. 为了証明传递性(且为了同伦論中以后的某些部分), 我們需要下面的引理:

引理 1.5. 設 $f_0 \sim f_1: X \to Y$, $g: Y \to W$, $h: Z \to X$. 这时有 $gf_0 \sim gf_1: X \to W$, $f_0h \sim f_1h: Z \to Y$.

設 $F: X \times I \to Y$ 是 f_0 与 f_1 間的一个同伦. 这时 $gF: X \times I \to W$ 是 gf_0 与 gf_1 間的一个同伦; 且由 $F^*(z,t) = F(h(z), t)$, $z \in Z$, $t \in I$, 所給出的 $F^*: Z \times I \to Y$ 是 f_0h 与 f_1h 間的一个同伦.

---

1) 一个初等的証明, 可以参看 M. H. A. Newman: Topology of Plane Sets, 第二版(1951, 剑桥大学出版)第七章. 其中証明了, 如果 0 是 2 維欧几里得空間 R^2 的原点, 則 $R^2 - 0$ 內的两条迴綫当而且只当 0 对于它們每一个的阶相同时是同伦的, 这里的阶("繞 0 的周数")能够取任意的整数值.

现在再来証明定理。設 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ 使得 $gf \sim 1: X \to X$, $fg \sim 1: Y \to Y$；且設 $u: Y \to Z$, $v: Z \to Y$ 使得 $vu \sim \sim 1: Y \to Y$, $uv \sim 1: Z \to Z$。考虑映象 $uf: X \to Z$, $gv: Z \to X$。由引理，因 $vu \sim 1: Y \to Y$，得 $gvu \sim g: Y \to X$，且 $gvuf \sim gf: X \to X$。但是 $gf \sim 1: X \to X$，因而由定理 1.2，$gvuf \sim 1: X \to X$。类似地，$ufgv \sim uv \sim 1: Z \to Z$。于是 uf 是 X 到 Z 的一个同伦等价，而 gv 是 uf 的一个同伦逆。

显然，同胚空間具有相同的同伦型，因而作为一个直接結果，同伦型的不变量是同胚的不变量。但是 $X = E^n$, $Y = y_0$（一个单独的点）的例子示明：两个空間具有相同的同伦型却并不就是同胚的。在同伦型的不变量中有連續同調羣[1]和同伦羣，后者是下一章的主題。

1) 这里原文是 singular homology groups，有譯作奇异同調羣的，今依科学出版社的"数学名詞"仍譯作連續同調羣——譯者注。

第二章　同　伦　羣

1. 絕对同伦羣的定义． 設 I^n 是由点 $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，$0 \leqslant \leqslant t_i \leqslant 1, i = 1, 2, \cdots, n$ 所組成的欧几里得 n 維方体．为方便起見，I^n 訓作是嵌入在希尔伯脫空間中，因此严格地講，I^n 中点的坐标是 $(t_1, \cdots, t_n, 0, \cdots)$．这样一来，对于 $m < n$，I^m 就恆同于 I^n 的某一个特殊的面．此外，在不致于引起誤会的地方，我們就略去这一串 0．I^n 的边界写作 $\dot{I}^n$，它是由 I^n 中，至少有一个 i 使得 $t_i = 0$ 或 1 的所有的点組成．

現在設 Y 是一个弧式連通的豪斯道夫空間，并且設 $y_0 \in Y$．假設 $f, g: I^n \to Y$ 使得 $f(1, t_2, \cdots, t_n) = g(0, t_2, \cdots, t_n)$，并且定义 $h: I^n \to Y$ 为

$$h(t_1, t_2, \cdots, t_n) = f(2t_1, t_2, \cdots, t_n), \qquad 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2},$$

$$= g(2t_1 - 1, t_2, \cdots, t_n), \ \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1.$$

于是 h 是連續的，我們写作 $h = f + g$.

現在假定 f, g 把 $\dot{I}^n$ 都映成 y_0，并且設 $M_n(Y, y_0)$ 代表映象 $I^n, \dot{I}^n \to Y, y_0$ 的总体．如此，則 $f+g$ 有定义，并且属于 $M_n(Y, y_0)$．設 $\pi_n(Y, y_0)$ 代表映象 $I^n, \dot{I}^n \to Y, y_0$ 的总体，并且設 $[f]$ 是 f 所在的同伦类．这样我們就可以証明：如果 $f, g \in M_n(Y, y_0)$，則 $[f + g]$ 只依賴于 $[f]$ 和 $[g]$．假定 $f \sim f', g \sim g': I^n, \dot{I}^n \to Y, y_0$．即存在 $F, G: I^n \times I \to Y, y_0$，且 $F(x, 0) = f(x)$，$F(x, 1) = f'(x)$，$G(x, 0) = g(x)$，$G(x, 1) = g'(x)$，$x \in I^n$．可以同样地定义一个 $H = F + G$，它是一个映象：$I^n \times I, \dot{I}^n \times I \to Y, y_0$．显然，这个 H 是 $f + g$ 和 $f' + g'$ 間的一个同伦．从而 $M_n(Y, y_0)$ 中引进的加法导出了 $\pi_n(Y, y_0)$ 中的一个加法．

当然，$\pi_n(Y, y_0)$中所定义的加法，并不只是由 $M_n(Y, y_0)$中的特殊加法来表述. 为了将来应用的方便，我們給出下面更一般的描述.

設 I_1^n 是 I^n 的子方体，由适合于 $\lambda_i \leqslant t_i \leqslant \mu_i$ 的点 $(t_1, \cdots, t_n)$ 所組成，其中 $0 \leqslant \lambda_i < \mu_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

引理 1.1. 給定 $f \in M_n(Y, y_0)$，則存在 $f' \in M_n(Y, y_0)$，使得 $f' \in [f]$ 且 $f'(I^n - I_1^n) = y_0$.

設 $f_t \in M_n(Y, y_0)$ 給定为

$$f_t(t_1, \cdots, t_n) =$$

$$= f\left(\frac{t_1 - \lambda_1 t}{1 - (1 - \mu_1 + \lambda_1)t}, \cdots, \frac{t_n - \lambda_n t}{1 - (1 - \mu_n + \lambda_n)t}\right),$$

如果对于所有的 i，有 $\lambda_i t \leqslant t_i \leqslant 1 - (1 - \mu_i)t$;

$= y_0$，如果不然的話.

这就得到 $f_0 = f$，并且除非对于所有 i 都有 $\lambda_i \leqslant t_i \leqslant \mu_i$，則 $f_1(t_1, \cdots, t_n) = y_0$. 命 $f' = f_1$. 我們說映象 f' 是由把 f 聚建在 I_1^n 上得到的.

現在設 $f, g \in M_n(Y, y_0)$，并且設 f', g' 分别把 f, g 聚建在子方体 I_1^n, I_2^n 上. 再假定 I_1^n 和 I_2^n 的內部不相交，并且 I_1^n 位于 I_2^n 的“左边”，这也就是說：如果 I_1^n 如上面所說，而 I_2^n 由 $\lambda_i' \leqslant t_i \leqslant u_i'$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 所給定，則 $\mu_1 \leqslant \lambda_1'$. 于是有一个映象 $k \in M_n(Y, y_0)$，由 $k | I_1^n = f'$, $k | I_2^n = g'$, $k(x) = y_0$ 所給出，如果 $x \in I^n - (I_1^n \cup I_2^n)$.

引理 1.2. $k \in [f + g]$.

首先当 I_1^n, I_2^n 分别是由 $0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1$ 所确定的半方体时，来証明这个引理. 如果选定由引理 1.1 所构造的特殊的聚建映象，我們看出 $k = f + g$. 現在設 f_1', g_1' 分别是 f, g 在 I_1^n, I_2^n 上的聚建映象. 这就有 $f_1' \in [f]$, $g_1' \in [g]$. 定义 $f_1 \in M_n(Y, y_0)$

为 $f_1(t_1, t_2, \cdots, t_n) = f_1'\left(\frac{1}{2}t_1, t_2, \cdots, t_n\right)$，并且类似地定义 g_1。于是 f_1', g_1' 为引理 1.1 所给出的 f_1, g_1 的聚建映象。因此，如果 k_1 由 $k_1 | I_1^n = f_1'$, $k_1 | I_2^n = g_1'$ 所給定，我們就有 $k_1 = f_1 + g_1$，并且 $f_1 \in [f_1'] = [f]$, $g_1 \in [g_1'] = [g]$。即 $k_1 \in [f+g]$。这就証明了这一特殊情形下的引理。

现在回到普遍情形，不失一般性，假定 $\mu_1 = \lambda_1'$；如果 $\mu_1 < \lambda_1'$ 并且 f' 把 f 聚建在 I_1^n 上，那末进一步由用 λ_1' 代替 μ_1，f' 就把 f 聚建到一个較大的子方体[1] 上。于是可以假定 $\mu_1 = \lambda_1'$。而且不仅如此，我們还可以同样地假定 $\lambda_1 = 0$, $\mu_1' = 1$，和 $\lambda_i = \lambda_i' = 0$, $\mu_i = \mu_i' = 1$, $i \neq 1$。现在定义 $\sigma_t : I^1 \to I^1$ 为

$$\begin{aligned} \sigma_t(t_1) &= t_1(1 + t(2\mu - 1)), & 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ &= 1 - (1 - t_1)(1 - t(2\mu - 1)), & \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1, \end{aligned}$$

这里的 $\mu = \mu_1 = \lambda_1'$。即 σ_t 是一个 I^1 的，rel $\dot{I}_1$ 的形变，它把 $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$ 变形成 $\langle 0, \mu\rangle$，而 $\left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle$ 成 $\langle \mu, 1\rangle$。定义 $\bar{\sigma}_t : I^n, \dot{I}^n \to I^n, \dot{I}^n$ 为

$$\bar{\sigma}_t(t_1, t_2, \cdots, t_n) = (\sigma_t(t_1), t_2, \cdots, t_n).$$

即有 $\bar{\sigma}_0 = 1$, $k\bar{\sigma}_1 \in [k]$, $f'\bar{\sigma}_1 \in [f'] = [f]$ 和 $g'\bar{\sigma}_1 \in [g'] = [g]$。现在 $f'\bar{\sigma}_1$ 把 f 聚建在半方体 $0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}$ 上，而 $g'\bar{\sigma}_1$ 把 g 聚建在半方体 $\frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1$ 上。另一方面，$k\bar{\sigma}_1$ 由

$$k|\bar{\sigma}_1\left(\text{半方体 } 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}\right) = f'\bar{\sigma}_1, \quad k\bar{\sigma}_1\left(\text{半方体 } \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1\right) = g'\bar{\sigma}_1$$

所給定。因而，由特殊情形，$k\bar{\sigma}_1 \in [f+g]$；但是 $k\bar{\sigma}_1 \in [k]$，所以 $k \in [f+g]$。

---

1) 应同时注意到，在这一步驟下，映象 k 的定义不受影响。

引理 1.3. $[f+g]=[g+f]$, $n>1$.

由于 I^2 与圆盘同胚，我們可以定义一个 I^2 的，經过 180° 的旋轉. 这个旋轉

$$\rho': I^2, \dot{I}^2 \to I^2, \dot{I}^2$$

同伦于恆等映象，并且使得 $t_1 \leqslant \frac{1}{2}$ 和 $t_1 \geqslant \frac{1}{2}$ 两部分交换.

定义 $\rho: I^n, \dot{I}^n \to I^n, \dot{I}^n$ 为

$\rho(t_1, t_2, t_3, \cdots, t_n) = (\rho'(t_1, t_2), t_3, \cdots, t_n)$, $n>1$.

于是 $\rho \sim 1$. 設 f 是聚建在半方体 $0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}$ 上，g 聚建在半方体 $\frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1$ 上(我們不必写出 f', g'). 因此 $f\rho$ 便聚建在半方体 $\frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1$ 上，$g\rho$ 聚建在半方体 $0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}$ 上. 我們約定称半方体 $0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}$ 为 I_L^n，而半方体 $\frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1$ 为 I_R^n. 因此，如果 k 由 $k \mid I_L^n = f$, $k \mid I_R^n = g$ 所給定，我們就有 $k \in [f+g]$ 和 $k\rho | I_L^n = g\rho$, $k\rho | I_R^n = f\rho$. 于是 $k\rho \in [g\rho + f\rho]$. 由于 $\rho \sim 1$，这就得到 $k\rho \in [f+g]$ 和 $g\rho + f\rho \in [g+f]$.

定理 1.4. 全体同伦类所成的集合 $\pi_n(Y, y_0)$ 在上述的加法運算下作成一个羣. 当 $n>1$ 时，这个羣是交换的.

(i) 右零元的存在　設 g 是常值映象，$g(I^n) = y_0$; 設 $\alpha \in \pi_n(Y, y_0)$ 且設 $f \in \alpha$ 聚建在 I_L^n 上. 于是由 $k | I_L^n = f$, $k | I_R^n = g$ 所确定的映象 k 也就是 f，所以 $\alpha + [g] = \alpha$. 我們写作 $[g]=0$.

(ii) 右逆元的存在　設 $\alpha \in \pi_n(Y, y_0)$ 由 $f \in M_n(Y, y_0)$ 代表. 定义 $(-\alpha)$ 为，由映象 $\bar{f}(t_1, t_2, \cdots, t_n) = f(1-t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 所給出的，$\bar{f}$ 所在的同伦类. 显然，$(-\alpha)$ 只依賴于 α. 于是 $\alpha + (-\alpha)$ 就由下面所給定的 $k \in M_n(Y, y_0)$:

$$\begin{aligned} k(t_1, t_2, \cdots, t_n) &= f(2t_1, t_2, \cdots, t_n), & 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ &= f(2-2t_1, t_2, \cdots, t_n), & \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1 \end{aligned}$$

所代表.

现在定义 $g_t \in M_n(Y, y_0)$ 为

$$g_t(t_1, t_2, \cdots, t_n) = f(2(1-t)t_1, t_2, \cdots, t_n), \qquad 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2},$$

$$= f(2(1-t)(1-t_1), t_2, \cdots, t_n), \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1.$$

于是 $g_0 = k$ 和 $g_1(I^n) = y_0$, 所以 $\alpha + (-\alpha) = 0$.

(iii) 結合性 設 $\alpha, \beta, \gamma \in \pi_n(Y, y_0)$, f, g, h 分别代表 α, β, γ 并且各自聚建在 $0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} \leqslant t_1 \leqslant \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} \leqslant t_1 \leqslant 1$ 上. 由引理 1.2 得到:在第一个子方体上与 f_1 相合;第二个上与 g 相合;第三个上与 h 相合的映象, 同时地代表了 $(\alpha + \beta) + \gamma$ 和 $\alpha +$ $+ (\beta + \gamma)$.

(iv) 交换性 $n > 1$, 这正是引理 1.3.

羣 $\pi_n(Y, y_0)$ 叫作 $Y \bmod y_0$ 的 n 維 (絕对) 同伦羣. 如果 $n = 1$, 它就是以 y_0 为端点的迴綫上的 Y 的基本羣.

2. 同伦羣的交替描述. 让我們选好一个固定的, I^n 到 $x_1^2 + + \cdots + x_n^2 \leqslant 1$ 所定义的标准 n 維体素 E^n 上的拓扑映象. E^n 的边界是 n 維欧几里得空間中的, 由 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ 所定义的 $(n-1)$ 維球 S^{n-1}. 用这一已給的, I^n, $\dot{I}^n$ 到 E^n, S^{n-1} 上的拓扑映象, 我們可以在 $\pi_n(Y, y_0)$ 的元素和映象 E^n, $S^{n-1} \to Y$, y_0 的同伦类間, 建立一个一一对应.

类似地, 如果由 $x_{n+1} \geqslant 0$ 所給定的 E_+^n 和由 $x_{n+1} \leqslant 0$ 所給定的 E_-^n, 分别是 $(n+1)$ 維空間中单位 n 維球 S^n 的北、南半球, 則它們中的每一个是以 S^{n-1} 为边界的 n 維体素, 而我們可以在 $\pi_n(Y, y_0)$ 的元素和映象 E_+^n, $S^{n-1} \to Y$, y_0 (或映象 E_-^n, $S^{-1} \to Y$, y_0) 的同伦类間, 建立一个一一对应. 现在設 $p_0 \in S^n$ 为点 $(1, 0, \cdots, 0)$.

定理 2.1. 在 $\pi_n(Y, y_0)$ 的元素和映象:

$$S^n, p_0 \to Y, y_0$$

的同伦类間, 可以确立一个一一对应.

由上面的論述中, 已經有条件在映象 E_+^n, $S^{n-1} \to Y$, y_0 的同伦

类和映象 $E^n_+, S^{n-1} \to Y, y_0$ 的同伦类間，設立一个一一对应. 事实上，这样的一个一一对应，可以由任何一个把 $E^n_+ - S^{n-1}$ 拓扑地映成 $S^n - p_0$ 的拓扑映象 $\phi_n: E^n_+, S^{n-1} \to S^n, p_0$ 所給出. 对应 $f \to f\phi_n$，$f: S^n, p_0 \to Y, y_0$ 导出同伦类間的一个对应. 如果 $g: E^n_+, S^{n-1} \to Y, y_0$ 是一个給定了的映象，則 $g\phi_n^{-1}: S^n, p_0 \to Y, y_0$ 是单値的. 因而它也就是連續的. 因为，如果 F 在 Y 内是閉的，則 $g^{-1}(F)$ 在 E^n_+ 内是閉的，所以 $(g\phi_n^{-1})^{-1}(F) = \phi_n(g^{-1}(F))$ 在 S^n 内也是閉的[1]. 由于 $g = (g\phi_n^{-1})\phi_n$，这就得到：$f \to f\phi_n$ 导出一个映象 $S^n, p_0 \to Y, y_0$ 的同伦类到映象

$$E^n_+, S^{n-1} \to Y, y_0$$

的同伦类上的映射. 为了証明这个映射是 1-1 的，設 $f, f': S^n, p_0 \to Y, y_0$，并且設 $G: E^n_+ \times I, S^{n-1} \times I \to Y, y_0$，使得

$$G(x, 0) = f\phi_n(x), \quad G(x, 1) = f'\phi_n(x), x \in E^n_+.$$

定义 $F: S^n \times I, p_0 \times I \to Y, y_0$ 为 $F(x, t) = G(\phi_n^{-1}(x), t)$，$x \in S^n$，$t \in I$. 于是 F 是单値的并且 $F(x, 0) = f(x)$，$F(x, 1) = f'(x)$. F 的連續性可以如上推出：只需把 g, ϕ_n, S^n 替换为 G，$\Phi_n, S^n \times I$，其中 $\Phi_n: E^n_+ \times I \to S^n \times I$ 由

$$\Phi_n(x, t) = (\phi_n(x), t), \quad x \in E^n_+, \quad t \in I$$

所給出.

对于 ϕ_n，一个适当的映象是映象 rh，其中 r 是旋轉：$r(x_1, \cdots, x_{n+1}) = (-x_{n-1}, x_2, \cdots, x_n, x_1)$，而 $h: E^n_+, S^{n-1} \to S^n, q_0$ 由 $h(x_1, \cdots, x_{n+1}) = (\mu x_1, \cdots, \mu x_n, 2x_{n+1} - 1)$ 所給定，其中的 $\mu \geqslant 0$ 被选定为使得 $h(x) \in S^n$，$x \in E^n_+$. 这里的 q_0 是南极 $(0, 0, \cdots, -1)$，而 E^n_+ 由 $x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1, x_{n+1} \geqslant 0$ 給出[2]. 在下

---

1) 自然，E^n_+ 是列紧的.

2) 对于这一个适当的映象的簡单例子，著者应該感謝牛曼 (M. H. A. Newman) 教授. 映象 h，由定义 $h(E^n_-) = q_0$，而可以扩充到 S^n 的全部. 这时不难看出，h 同伦于(看作一个映象：$S^n, E^n_-, q_0 \to S^n, E^n_-, q_0$)恒等映象(这就是所謂"縮閉口袋法").

一章内我們将看到，这个一一对应只依賴于拓扑映象 ϕ_n 的定向类。事实上，在同一定向类中的任意两个映象 ϕ_n, ϕ'_n: $E^n_+, S^{n-1} \to S^n, p_0$ 是同伦的。

任何一个映象 $g: E^n_+, S^{n-1} \to Y, y_0$，由命 $g'(E^n_-) = y_0$，便可以扩充为一个映象 $g': S^n, p_0 \to Y, y_0$。可以証明：对应 $g \to g'$ 导出一个与映象相应的同伦类之間的一一对应。

設 $\alpha \in \pi_n(Y, y_0)$ 由一个映象 $f \in M_n(Y, y_0)$ 所代表，f 聚建在 I^n 的某一个子方体 I^n_1 上。于是一个把 $I^n - \dot{I}^n$ 拓扑地映成 $S^n - p_0$ 的映象

$$g: I^n, \dot{I}^n \to S^n, p_0$$

导出一个 $\pi_n(Y, y_0)$ 的元素和映象 $S^n, p_0 \to Y, y_0$ 間的一一对应。映象 $fg^{-1}: S^n, p_0 \to Y, y_0$ 将聚建在 S^n 的某一个閉 n 維胞腔 E^n_1 上，其中 $g(I^n_1) = E^n_1$，而 I^n_1 是 I^n 的一个相应的子方体。再者，如果 $f_1, f_2 \in M_n(Y, y_0)$ 代表 $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_n(Y, y_0)$，而 f_1, f_2 聚建于内部不相交的子方体 I^n_1, I^n_2 上，于是 $f_1 g^{-1}$ 和 $f_2 g^{-1}$ 将聚建在 S^n 上的、内部不相交的 n 維胞腔 E^n_1, E^n_2 上。如果 $k \in M_n(Y, y_0)$ 由 $k|I^n_1 = f_1$, $k|I^n_2 = f_2$, $k(x) y_0$ 对其它的 $X \in I^n$ 所給定，則 $k \in \alpha_1 + \alpha_2$，而 $kg^{-1}: S^n, p_0 \to Y, y_0$ 由 $kg^{-1}|E^n_1 = f_1 g^{-1}$, $kg^{-1}|E^n_2 = f_2 g^{-1}$, $kg^{-1}(x) = y_0$ 对其它的 $x \in S^n$，所給定。这証明了：$\pi_n(Y, y_0)$ 中的加法导出了映象 $S^n, p_0 \to Y, y_0$ 的同伦类間的一个加法。給定两个这样的同伦类 β_1, β_2，它們的代表是 f_1, f_2，分别集中在内部不相交的 n 維胞腔 E^n_1, E^n_2 上，然后定义 $k: S^n, p_0 \to Y, y_0$ 为 $k|E^n_1 = f_1, k|E^n_2 = f_2$, $k(x) = y_0$ 对其它的 $x \in S^n$。于是 k 代表 $\beta_1 + \beta_2$。如果 $n = 1$，我們还要求在 S^1 的已給定向中，由基点出发，E^1_1 超在 E^1_2 的前面。

这一个加法运算使得这一同伦类的集合作成一个羣；当 $n > 1$ 时，当与 $\pi_n(Y, y_0)$ 同构；当 $n=1$ 时，依照 g 是順向的还是反向的，同构或反同构于 $\pi_1(Y, y_0)$。事实上，对于元素是映象 $I^n, \dot{I}^n \to Y, y_0$ 的同伦类，或映象 $E^n, S^{n-1} \to Y, y_0$ 的同伦类，或映象 $S^n, p_0 \to Y, y_0$ 的同伦类所成的羣，我們将采用同一个符号 $\pi_n(Y, y_0)$，因此 $\pi_n(Y, y_0)$ 中的一个元素 α 可以由已給的两种类型中的任一个映

象来代表．这一个記号，如我們所說的，将在下一章得到闡明，在那里指出了：在不同性質的映象类中，本質上只有一个自然的一一对应．

对于同伦羣的交替描述，可以参看，例如：G. W. Whitehead, Annals of Mathematics, 51, 1950, 192—288; J. H. C. Whitehead, Annals of Mathematics, 42, 1941, 409—28.

3. 基点的作用；$\pi_1(Y, y_0)$ 在 $\pi_n(Y, y_0)$ 上的运算． 我們已經定义过一个羣 $\pi_n(Y, y_0)$，它依賴于一个整数 n；某一个空間 Y 和一个点 $y_0 \in Y$，y_0 叫作基点．如果 $n > 1$，这个羣的运算写作加法；$n = 1$，則写作乘法．現在我們研究基点 y_0 的选擇对这个羣的影响．我們还要提一下，Y 是弧式連通的．

引理 3.1． 設 E^n 是任意的 n 維体素，边界为 S^{n-1}．于是 $E^n \times 0 \cup S^{n-1} \times I$ 是 $E^n \times I$ 的一个收縮核．

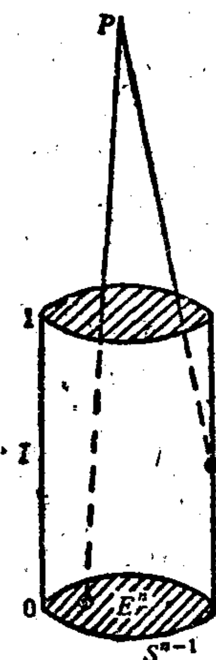


图 1． $E^n \times I$ 到 $E^n \times 0 \cup S^{n-1} \times I$ 上的(形变)保核收縮

我們把 E^n 取作为欧几里得球体 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1$，并把它安置在 $(n+1)$ 維空間中．E^n 中的点是模 $\leqslant 1$ 的向量 x．我們用 $|x|$ 来記向量 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 的模 $\sqrt{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}$．于是保核收縮

$$\rho: E^n \times I \to E^n \times 0 \cup S^{n-1} \times I$$

就正是 R^{n+1} 中的点 $(0, \cdots, 0, 2)$ 的投影，即[1]

$$\begin{aligned}\rho(x, t) &= \left(\frac{x}{|x|},\ 2 - \frac{2-t}{|x|}\right),\quad |x| \geqslant 1 - \frac{t}{2},\\ &= \left(\frac{2x}{2-t},\quad 0,\quad\right),\quad |x| \leqslant 1 - \frac{t}{2}.\end{aligned}$$

显然，$E^n \times 0 \cup S^{n-1} \times I$ 其实是 $E^n \times I$ 的一个形变收縮核．現在設 C 是在 Y 的从 y_0 到 y_1 的一条路綫，即一个映象 $C: I \to Y$，$C(0) = y_0$，$C(1) = y_1$．設 $\alpha_1 \in \pi_n(Y, y_1)$ 由 $f_1 \in M_n(Y, y_1)$ 代表，并且設

1) 参看图 1．

$$g': I^n \times 0 \cup \dot{I}^n \times I \to Y$$

由 $g'(x, 0) = f_1(x)$, $x \in I^n$, $g'(x, t) = C(1-t)$, $x \in \dot{I}^n$, $t \in I$所給定. 由引理,有一个保核收縮 $\rho: I^n \times I \to I^n \times 0 \cup \dot{I}^n \times I$. 于是 $g'\rho: I^n \times I \to Y$ 是 g' 对于 $I^n \times I$ 的一个扩张. 設 $f_0 \in M_n(Y, y_0)$ 由 $f_0(x) = g'\rho(x, 1)$, $x \in I^n$ 所給定,并且設 $\alpha_0 = [f_0] \in \pi_n(Y, y_0)$. 設$[C]$为映象 $C: I, 0, 1 \to Y, y_0, y_1$ 所在的同伦类.

定理 3.2. 对应 $\alpha_1 \to \alpha_0$ 導出 $\pi_n(Y, y_0)$ 到 $\pi_n(Y, y_1)$ 上的一个同构,这个同构只依賴于$[C]$.

首先我們証明: 如果 $F: I^n \times I \to Y$ 是任意一个映象, 使得 $F(x, 0) = f_1(x)$, $x \in I^n$, $F(x, t) = C'(1-t)$, $x \in \dot{I}^n$, $t \in I$, $C' \in [C]$, 并且 $f_0' \in M_n(Y, y_0)$ 由 $f_0'(x) = F(x, 1)$, $x \in I^n$ 所給定, 則 $[f_0'] = \alpha$. 我們先来証明它的一个特殊情形,即

引理 3.3. 設 $F: I^n \times I \to Y$ 是

$$f, f' \in M_n(Y, y_0)$$

之間的一个同伦,使得 $F(x, t) = \lambda(t)$, $x \in \dot{I}^n$, 其中 $\lambda(t)$ 是一条零倫迴綫. 于是 $[f] = [f'] \in \pi_n(Y, y_0)$.

我們給出一个映象 $\mu: I \times I \to Y$, 适合于

$$\mu(t, 0) = \lambda(t),\ \mu(t, 1) = \mu(0, u) = \mu(1, u) = y_0.$$

借助于这个映象 μ, 我們就能把同伦 F 替换为 $M_n(Y, y_0)$ 中映象間的同伦. 粗略地說, 我們是把 (t, u)-方形一边上的形变替换为其余三边上的形变. 严格地来看,定义

$$j': I^n \times I \times 0 \cup \dot{I}^n \times I \times I \to Y$$

为

$$j'(x, t, 0) = F(x, t),\ x \in I^n,\ t \in I,$$

$$j'(x, t, u) = \mu(t, u),\ x \in \dot{I}^n,\ (t, u) \in I \times I.$$

由引理 3.1 的一个簡易的推广, $I^n \times I \times 0 \cup \dot{I}^n \times I \times I$ 是 $I^n \times I \times I$ 的一个收縮核. 因此我們可以扩张 j' 成 $j: I^n \times I \times I \to Y_0$. 于是所要求的 f 与 f' 之間的同伦是同伦 $F_1 + F_2 + F_3$, 其中 F_1, F_2, F_3: $I^n \times I, \dot{I}^n \times I \to Y, y_0$ 由

$$\left.\begin{aligned}F_1(x, t) &= j(x, 0, t)\\ F_2(x, t) &= j(x, t, 1)\\ F_3(x, t) &= j(x, 1, 1-t)\end{aligned}\right\} x\in I^n, t\in I$$

給出. 这就完成了引理的証明.

轉回到定理,設 $k: I^n\times I\to Y$ 由

$$k(x, t) = g'\rho(x, 1-2t), \qquad 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2},$$

$$= F(x, 2t-1), \qquad \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.$$

給出(这里的 $g'\rho$ 就是在定理前面出現过的那个,而 F 即紧接着定理的条文中所述的). 于是 k 是 f_0 与 f' 間的一个同伦,在这一同伦下, $\dot{I}^n$ 的象点描出[1] CC'^{-1}. 由于 $C'\in[C]$, CC'^{-1} 是一条零伦迴綫,因此引理 3.3 可以用作証明 $f_0'\in[f_0]=\alpha_0$.

現在設 $f_1'\in\alpha_1$. 这时存在 $M_n(Y, y_0)$ 中映象間的一个同伦 F_1 連接 f_1' 与 f_1. 同伦 F_1+F 連接 f_1' 与 f_0', 而 $\dot{I}^n$ 中的象点描出 C_0C', 其中 C_0 是(在点 y_1 的)常値迴綫. 由于 $C_0C'\in[C]$, 从我們已証明过的事实就有: α_0 只依賴于 α_1 和 $[C]$. 我們称 α_0 是 α_1 在 C^* 下的象. 于是 C^* 是一个同态. 設 $f_1, g_1\in M_n(Y, y_1)$ 代表 $\alpha_1, \beta_1\in\pi_n(Y, y_1)$, 并且設 F, G 是 f_1, g_1 的形变, 在这一形变下 $\dot{I}^n$ 的象点描出 C^{-1}. 由于

$$F(1, t_2, \cdots, t_n, t) = G(0, t_2, \cdots, t_n, t) = C(1-t),$$

于是 $H=F+G$ 有定义. 再者, $H(x,0)=(f_1+g_1)(x)$, $x\in I^n$; 由 $f_0(x)=F(x, 1)$ 所給定的 $f_0\in M_n(Y, y_0)$ 代表 $C^*(\alpha_1)$; 由 $g_0(x)=G(x, 1)$ 所給定的 $g_0\in M_n(Y, y_0)$ 代表 $C^*(\beta_1)$; 而 H 是 (f_1+g_1) 的一个形变, 在这一形变下, $\dot{I}^n$ 的象点描出 C^{-1}. 这时, 由于 (f_1+g_1) 代表了 $\alpha_1+\beta_1$, 由 $h_0(x)=H(x, 1)$ 所給定的 $h_0\in M_n(Y, y_0)$ 就代表 $C^*(\alpha_1+\beta_1)$. 但是 $h_0=f_0+g_0$, 所以 h_0 代表 $C^*(\alpha_1)+C^*(\beta_1)$.

現在設 C_1 是从 y_0 到 y_1 的一条路綫, 而 C_2 是从 y_1 到 y_2 的一

1) 由通例, C_1C_2 即联 C_1 到 C_2 所成的道路.

条路綫．于是 C_1C_2 是从 y_0 到 y_2 的一条路綫．如果 $f\in M_n(Y, y_0)$，于是 f 沿 C_2^{-1} 又再延 C_1^{-1} 的两个形变組成了 f 沿 $(C_1C_2)^{-1}$ 的一个形变．因此[1] $(C_1C_2)^*=C_1^*C_2^*$．特别，$(C^{-1}C)^*=(C^{-1})^*C^*$．現在 $C^{-1}C$ 是一条（在点 y_1 的）零伦路綫，所以 $(C^{-1}C)^*$ 是 $\pi_n(Y, y_1)$ 的恆同自同构．类似地，$C^*(C^{-1})^*$ 是 $\pi_n(Y, y_0)$ 的恆同自同构．因此 $C^*: \pi_n(Y, y_1)\approx\pi_n(Y, y_0)$．这就完成了定理的証明．

羣 $\pi_n(Y, y_0)$, $\pi_n(Y, y_1)$, $\cdots$ 互相同构，它們的抽象羣叫作 Y 的 n 維同伦羣并記作 $\pi_n(Y)$．

現在設 y_1 与 y_0 重合．这时 y_0 上的閉路类是 $\pi_1(Y, y_0)$ 中的元素．于是 $\pi_1(Y, y_0)$ 作成 $\pi_n(Y, y_0)$ 上的一个运算羣．不难看出，$\pi_1(Y, y_0)$ 是一个到它自身上的內自同构，即如果

$$\alpha, \beta\in\pi_1(Y, y_0), \text{ 則 } \beta(\alpha)=\beta\alpha\beta^{-1}.$$

如果对于任意两点 y_1, y_2 和任意两条从 y_1 到 y_2 的道路 C_1, C_2 有 $C_1^*=C_2^*$，我們就說 Y 是 n–单式的．可以証明：Y 是 n–单式的，当而且只当对于某一个 y_0, $\pi_1(Y, y_0)$ 在 $\pi_n(Y, y_0)$ 上的作用是平凡的．条件的必要性显然．現在設 C 是从 y_0 到 y_1 的一条路綫，于是 $CC_1C_2^{-1}C^{-1}$ 是 y_0 上的一条閉路，因此如果 $\pi_1(Y, y_0)$ 在 $\pi_n(Y, y_0)$ 上的作用是平凡的，則

$$C^*C_1^*(C_2^*)^{-1}(C^*)^{-1}=1: \pi_n(Y, y_0)\approx\pi_n(Y, y_0).$$

因此 $C^*C_1^*(C_2^*)^{-1}=C^*$, $C_1^*(C_2^*)^{-1}=1$, $C_1^*=C_2^*$，而 Y 是 n–单式的．

我們立刻看出：Y 是 1–单式的，当而且只当 $\pi_1(Y)$ 是交换的；Y 对于所有 n 是单式的，如果 Y 是单連通的（即如果 $\pi_1(Y)=$ $=0$）．

如果存在一个順向的拓扑映象 $g: S^n, p_0\to S'^n, p_0'$，使得 $f=f'g$，让我們約定，把 $\pi_n(Y, y_0)$ 中由映象 $f: S^n, p_0\to Y, y_0$ 和 $f': S^n$,

---

1) 这正是我們宁願用 C^{-1} 而不用 C 的理由．如果我們用 $f\in M_n(Y, Y_0)$ 的形变定义了运算 C^*，在这一形变下 I^n 的象点描出 C_1，我們就有 $(C_1C_2)^*=C^*C_1^*$，而且 $\pi_1(Y, y_0)$ 反表示为 $\pi_n(Y, y_0)$ 上的一个运算羣．

$p_0' \to Y$, y_0 所导出的元素恆同看待．有了这个約定(关于它，将于第三章內給以說明)；我們就可以将 n-单式这一有用的概念表示成下面的定理．

定理 3.4. 如果 Y 是 n-单式的，对于每一个 $y_0 \in Y$，一个映象 $f: S^n \to Y$ 决定唯一的一个 $\pi_n(Y, y_0)$ 中的元素．

設 $f(x_1) = y_1$, $x_1 \in S^n$, $y_1 \in Y$．于是 f 决定 $\pi_n(Y, y_1)$ 的一个元素，因而也就决定 $\pi_n(Y, y_0)$ 的一个元素．假定 $f(x_2) = y_2$，这时存在 S^n 的一个旋轉，命为 ρ，把 x_2 变到 x_1．于是当 $f: S^n, x_1 \to Y, y_1$ 代表 $\alpha_1 \in \pi_n(Y, y_1)$，就有(由約定) $f\rho: S^n, x_2 \to Y, y_1$．在 f 下，S^n 的全体旋轉的象是 f 的一个同伦，在这一同伦下，x_2 的象点沿着一条路綫 C^{-1} 从 y_2 移动到 y_1．因此，如果 $f: S^n, x_2 \to Y, y_2$ 代表 $\alpha_2 \in \pi_n(Y, y_2)$，$\alpha_1 = C^*(\alpha_2)$，则由 f 所决定的 $\pi_n(Y, y_0)$ 的元素不依賴于 S^n 內的基点的选择．

作为本章的結束，我們証明下面的定理，它給出了同伦羣的拓扑意义．

定理 3.5. 同伦羣是同伦型的不变量．

我們先陈述一个基本引理．它的証明实际上是初等的，这里仅仅給以概略的論說．

引理 3.6. 任意一个映象 $f: X, x_0 \to Y, y_0$ 导出一个同态 $f^*: \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$．如果 $g: Y, y_0 \to Z, z_0$，则 $(gf)^* = g^* f^*$．

設 $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$ 由 $h: I^n, \dot{I}^n \to X, x_0$ 代表．定义 $f^*(\alpha)$ 为 $\pi_n(Y, y_0)$ 的元素，由 $fh: I^n, \dot{I}^n \to Y, y_0$ 代表．于是有，f^* 只依賴于 α，它是一个同态并且有 $(gf)^* = g^* f^*$．它們的証明是初等的，我們留給讀者．

現在我們回到定理上来．設 X, Y 是具有相同的同伦型的两个空間．即有 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ 两个映象，使得 $gf \sim 1: X \to X$, $fg \sim 1: Y \to Y$．設 $f(x_0) = y_0$, $g(y_0) = x_1$, $f(x_1) = y_1$．于是 f 导出

$$f^*: \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0) \text{ 和 } f^{**}: \pi_n(X, x_1) \to \pi_n(Y, y_1),$$

而 g 导出 $g^*: \pi_n(Y, y_0) \to \pi_n(X, x_1)$．設 $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$ 由 $h: I^n$,

$\dot{I}^n \to X$, x_0 代表 0 由于

$$gf \sim 1: X \to X, \quad gfh \sim h: I^n \to X,$$

此外,在这一同伦下,$\dot{I}^n$ 的象点描出一条从 x_0 到 x_1 的路綫. 于是 $(gf)^*$ 或 g^*f^* 是 $\pi_n(X, x_0)$ 到 $\pi_n(X, x_1)$ 上的一个同构. 类似地, $f^{**}g^*$ 是 $\pi_n(Y, y_0)$ 到 $\pi_n(Y, y_1)$ 上的一个同构. 从这两个事实,就有 g^* 是 $\pi_n(Y, y_0)$ 到 $\pi_n(X, x_1)$ 上的一个同态,而且是一个同构. 于是 $g^*: \pi_n(Y, y_0) \approx \pi_n(X, x_1)$, 因而 X 与 Y 的同伦羣是同构的.

[注意. 这一节的所有内容,可以通过映象 $S^n, p_0 \to Y, y_0$ 而全部地"重写". 在这一注释下的运算子的定义以及这些定理的証明的"解释",就留給讀者了.]

4. 相对同伦羣. 設 Y_0 是 Y 中弧式連通的一个閉子空間. 并且設 $y_0 \in Y_0$. 現在 I^{n-1} 是 I^n 的面,由 $t_n = 0$ 給出;設 J^{n-1} 是 I^n 中其余 $(n-1)$ 維面的并集,并且考虑映象 $f: I^n, I^{n-1}, J^{n-1} \to Y, Y_0, y_0$. 我們把这些映象的总体叫做 $M_n(Y, Y_0, y_0)$, 而把它們的同伦类的总体叫作 $\pi_n(Y, Y_0, y_0)$. 現在設 $f, g \in M_n(Y, Y_0, y_0)$ 并且設 $n \geqslant 2$. 于是 $f+g$ 有定义并且是在 $M_n(Y, Y_0, y_0)$ 內. 正如本章 § 1 中那样,我們看出 $M_n(Y, Y_0, y_0)$ 中的加法,导出 $\pi_n(Y, Y_0, y_0)$ 中的一个加法. 我們将証明,在这一个加法下,$\pi_n(Y, Y_0, y_0)$ 是一个羣,如果 $n \geqslant 3$,它还是交換的. 应該注意到,如果 $Y_0 = y_0$, 这个相对同伦羣 $\pi_n(Y, Y_0, y_0)$ 就还原为絕对同伦羣 $\pi_n(Y, y_0)$. 一般,我們不能把 $\pi_n(Y, Y_0, y_0)$ 构造成一个羣,不过对集合 $\pi_1(Y, Y_0, y_0)$ 的研究,有时候表明是有用的. 設 I_1^n 是 I^n 的子方体,由点 $(t_1, \cdots, t_n)$ 組成,其中 $\lambda_i \leqslant t_i \leqslant \mu_i$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$, $0 \leqslant \leqslant t_n \leqslant \mu_n$. 在这一节內,我們只考虑这样的子方体. 設 $[f]$ 代表 $\pi_n(Y, Y_0, y_0)$ 中含有映象 $f \in M_n(Y, Y_0, y_0)$ 的同伦类.

引理 4.1. 給定 $f \in M_n(Y, Y_0, y_0)$, 存在 $f' \in [f]$ 使得 $f'(I^n - I_1^n) = y_0$.

証明完全与引理 1.1 类似(注意 $\lambda_n = 0$).

我們說 f' 是由把 f 聚建在 I_1^n 上得到的.

現在設 $f, g \in M_n(Y, Y_0, y_0), n \geqslant 2$. 我們假定 $f' \in [f]$, $g' \in [g]$分別聚建在 I_1^n, I_2^n 上，它們的內部不相交并且 I_1^n 位于 I_2^n 的左边。我們定义 $k \in M_n(Y, Y_0, y_0)$ 为

$$k|I_1^n = f', \quad k|I_2^n = g', \quad k(I^n - (I_1^n \cup I_2^n)) = y_0.$$

引理 4.2. $k \in [f + g]$.

这个証明与引理 1.2 完全类似.

引理 4.3. $[f + g] = [g + f], n > 2$.

由于 $n > 2$, 引理 1.3 的証明可以同样地应用到这里. 不过应該注意:如果 $n = 2$, $\rho': I^2, \dot{I}^2 \to I^2, \dot{I}^2$ 并不把 J^1 变入 J^1, 因而也就不能引出一个所許可的同伦,除非是映象 $f \in M_n(Y, Y_0, y_0)$ 具有这样的一个特殊性質: $f(\dot{I}^2) = y_0$.

定理 4.4. 在这一个加法運算下,同伦类的集合 $\pi_n(Y, Y_0, y_0)$ 是一个羣 ($n \geqslant 2$). 如果 $n > 2$, 它是交换的[1].

这个証明与定理 1.4 完全类似.

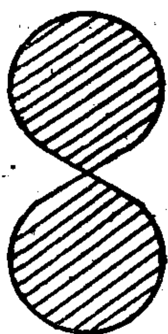


图 2. 如果 Y "充满"图形 8, 而 Y_0 是它的边界,则 $\pi_2(Y, Y_0) \approx \pi_1(Y_0)$ 具有两个生成元的羣

現在 I^n 可以这样的拓扑地映射到单位实心球 E^n, 使得 I^{n-1}映射到[2]E_+^{n-1} 上, J^{n-1} 映射到 E_-^{n-1} 上, 而点 $x_0 = (0, 0, \cdots, 0) \in I^n$ 映射到 $p_0 = (1, 0, \cdots, 0) \in E^n$. 于是我們可以在映象

$$I^n, \dot{I}^n, x_0 \to Y, Y_0, y_0$$

的同伦类和映象 $E^n, S^{n-1}, p_0 \to Y, Y_0, y_0$ 的同伦类之間，建立一个一一对应. 相对同伦羣最初是通过映象 $E^n, S^{n-1}, p_0 \to Y, Y_0, y_0$ 来定义的，我們現在就要用这方面的术語来描述它,并且証明这两个定义等价. 作为准备,我們先証明两个結果.

設 $\phi_n: E_+^n, S^{n-1} \to S^{n-1}, p_0$ 定义如第二章 § 2, 并且設

---

1) 参看图 2. 組 (Y, Y_0) 使得 $\pi_2(Y, Y_0)$ 是非交換的.

2) 如前, E_+^{n-1} 和 E_-^{n-1} 是界定 E^n 的球 S^{n-1} 的北半球和南半球.

$$\bar{\phi}_n:\ S^n,\ E_-^n \to S^n,\ p_0$$

由 $\bar{\phi}_n | E_+^n = \phi_n$, $\bar{\phi}_n(E_-^n) = p_0$ 所定义.

定理 4.5. 映象 $\bar{\phi}_n$ 同伦于恒等映象. 精确地說

$$\bar{\phi}_n \sim 1: S^n,\ E_-^n,\ p_0 \to S^n,\ E_-^n,\ p_0.$$

我們再次取定 $\phi_n = rh$, 其中

$$h:\ E_+^n,\ S^{n-1} \to S^n,\ q_0 \text{ 和 } r:\ S^n,\ q_0 \to S^n,\ p_0.$$

由定义 $\bar{h}(E_-^n) = q_0$, 我們就把 h 扩张成 $\bar{h}: S^n,\ E_-^n \to S^n,\ q_0$, 因而 $\bar{\phi}_n = r\bar{h}$. S^n 中的点由对 (x, u) 代表, $x \in S^{n-1}$, $-1 \leqslant u \leqslant 1$, 如果 $x = (x_1, \cdots, x_n)$, 那末 $(x, u) = (x_1\sqrt{1-u^2}, \cdots, x_n\sqrt{1-u^2})$. 定义

$$h_t: S^n \to S^n$$

为

$$\begin{aligned} h_t(x, u) &= (x, u - t + ut), \qquad 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ &= (x, u - t - ut), \quad -1 \leqslant u \leqslant 0. \end{aligned}$$

于是 $h_0 = 1$, $h_1 = \bar{h}$. 定义

$$r_t:\ S^n \to S^n$$

为

$$r_t(x_1, \cdots, x_{n+1}) = (x_1\sqrt{1-t^2} - x_{n+1}t, x_2, \cdots, x_n, x_1 t + \\ + x_{n+1}\sqrt{1-t^2}).$$

于是 $r_0 = 1$, $r_1 = r$. 因而 $\bar{\phi}_n = r_1 h_1$. 同伦

$$r_t h_t:\ S^n \to S^n$$

具有定理中所陈述的性質. 因为

$$r_t h_t(p_0) = r_t h_t(1, 0, \cdots, 0) = r_t(\sqrt{1-t^2}, 0, \cdots, 0, -t) = \\ = (1, 0, \cdots, 0) = p_0;$$

并且如果 $u \leqslant 0$, $v = u - t - ut$, 那末

$$r_t h_t(x, u) = r_t(x, u) = (\cdots, t\sqrt{1-v^2}x_1 + v\sqrt{1-t^2}).$$

由于 $-v = t - u + ut \geqslant t$, 我們就有

$$-v\sqrt{1-t^2} \geqslant t\sqrt{1-v^2} \geqslant t\sqrt{1-v^2}x_1,$$

所以 $r_t h_t(x, u) \in E_-^n$. 这就完成了定理的証明.

設 E_1^n, E_2^n 是 E^n 的子集, 分别由 $x_n \geqslant 0$, $x_n \leqslant 0$ 給定. 这时

我們有：

系 4.6. 存在一个同伦 $\omega \sim 1: E^n, S^{n-1}, p_0 \to E^n, S^{n-1}, p_0$，使得 $\omega(E_2^n) = p_0$.

E^n 中的点可以表示成 $\lambda x + (1-\lambda)p_0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $x \in S^{n-1}$；这也就是說，点 $\lambda x + (1-\lambda)p_0$ 的坐标是 $(\lambda x_1 + 1 - \lambda, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$. 于是[1]

$$\lambda x + (1-\lambda)p_0 \in E_1^n(E_2^n) \quad 当 \quad x \in E_+^{n-1}(E_-^{n-1}).$$

設 $g_t' = r_t h_t: S^{n-1}, E_-^{n-1}, p_0 \to S^{n-1}, E_-^{n-1}, p_0$. 这时 g_t' 由定义 $g_t(\lambda x + (1-\lambda)p_0) = \lambda g_t'(x) + (1-\lambda)p_0$ 而可以扩张成

$$g_t: E^n, E_2^n, p_0 \to E^n, E_2^n, p_0.$$

由于 $g_0' = 1$，这就有 $g_0 = 1$；如果 $x \in E_-^{n-1}$，則

$$g_1(\lambda x + (1-\lambda)p_0) = \lambda g_1'(x) + (1-\lambda)p_0 =$$
$$= \lambda \bar{\varphi}_{n-1}(x) + (1-\lambda)p_0 = \lambda p_0 + (1-\lambda)p_0 = p_0.$$

由于 $g_t'(p_0) = p_0$，同样地就有 $g_t(p_0) = p_0$. 这就証明了系4.6. 我們命 $\omega = g_1$. 为了以后的应用应該注意到，实际上我們証明了，在經 ω 到恆等映象的同伦中，E_2^n 始終保留在 E_2^n 内.

我們現在証明：

定理 4.7. 在映象 $I^n, I^{n-1}, J^{n-1} \to Y, Y_0, y_0$ 的同伦类和映象 $E^n, S^{n-1}, p_0 \to Y, Y_0, y_0$ 的同伦类之間，我們可以建立一个一一对应.

事实上，我們要在映象 $E^n, E_+^{n-1}, E_-^{n-1} \to Y, Y_0, y_0$ 的同伦类和映象

$$E^n, S^{n-1}, p_0 \to Y, Y_0, y_0$$

的同伦类之間建立一个一一对应. 設 $f: E^n, S^{n-1}, p_0 \to Y, Y_0, y_0$；这就有 $f\omega \sim f: E^n, S^{n-1}, p_0 \to Y, Y_0, y_0$，并且 $f\omega(E_-^{n-1}) = f(p_0) = y_0$. 于是在映象

$$E^n, S^{n-1}, p_0 \to Y, Y_0, y_0$$

的每一个同伦类中就有一个映象

---

1) 注意：$E_1^n \cap S^{n-1} = E_+^{n-1}$，　$E_2^n \cap S^{n-1} = E_-^{n-1}$.

$$E^n, E_+^{n-1}, E_-^{n-1} \to Y, Y_0, y_0.$$

为了指出上述同伦类之間的这个对应是一一的，我們必須証明：如果 $f; f': E^n, E_+^{n-1}, E_-^{n-1} \to Y, Y_0, y_0$，並且

$$f \sim f': E^n, S^{n-1}, p_0 \to Y, Y_0, y_0,$$

則

$$f \sim f': E^n, E_+^{n-1}, E_+^{n-1} \to Y, Y_0, y_0.$$

由于 $\omega \sim 1: E^n, E_-^{n-1}, p_0 \to E^n, E_-^{n-1}, p_0$ 以及 $f(E_-^n) = y_0$，这时

$$f\omega \sim f: E^n, E_+^{n-1}, E_-^{n-1} \to Y, Y_0, y_0.$$

类似地，$f'\omega \sim f': E^n, E_+^{n-1}, E_-^{n-1} \to Y, Y_0, y_0$. 由于 $\omega(E_-^{n-1}) = p_0$，同样有 $f\omega \sim f'\omega: E^n, E_+^{n-1}, E_-^{n-1} \to Y, Y_0, y_0$. 于是 $f \sim f\omega \sim f'\omega \sim \sim f': E^n, E_+^{n-1}, E_-^{n-1} \to Y, Y_0, y_0$，而定理証毕.

用 $\pi_n(Y, Y_0, y_0)$（看作映象 $I^n, I^{n-1}, J^{n-1} \to Y, Y_0, y_0$ 的同伦类的集合）的元素和映象

$$E^n, S^{n-1}, p_0 \to Y, Y_0, y_0$$

的同伦类之間的一个固定的一一对应以及 $\pi_n(Y, Y_0, y_0)$ 元素間已給定的加法，就可以在上述映象的同伦类間定义一个加法. 不过，去导出一个直接的定义也是很便利的. 給定同伦类 α, β，从系4.6立刻得知，可以选择 $f \in \alpha$, $g \in \beta$ 使得 $f(E_2^n) = g(E_1^n) = y_0$. 接着，我們就定义 $\alpha + \beta$ 作为包含这样的映象的同伦类，它在 E_1^n 上与 f 重合；在 E_2^n 上与 g 重合. 如此定义的 $\alpha + \beta$ 只依賴于同伦类 α, β，这是从下面的引理立刻就可以知道的，这一个引理的証明非常类似于在証明定理 4.7 中所用到的一个論据.

引理 4.8. 設 $f_0 \sim f_1: E^n, S^{n-1}, p_0 \to Y, Y_0, y_0$ 且 $f_i(E_2^n) = y_0$，$i = 1, 2$. 于是存在一个同伦 f_t: $E^n, S^{n-1}, p_0 \to Y, Y_0, y_0$ 且 $f_t(E_2^n) = y_0$.

因为

$$f_0 \sim f_0\omega \sim f_1\omega \sim f_1: E^n, S^{n-1}, E_2^n \to Y, Y_0, y_0,$$

所以引理成立.

我們留給讀者自己去驗証，当我們解释 $\alpha + \beta$ 如上述那样，我

們实际上就把映象 $E^n, S^{n-1}, p_0 \to Y, Y_0, y_0$ 的同伦类的集合作成了一个与原先所定义的 $\pi_n(Y, Y_0, y_0)$ 同构的羣. 我們将用同一个記号 $\pi_n(Y, Y_0, y_0)$ 去代表由两种方法中的任一个所定义的羣.

用这一个特殊的同伦 $r_t h_t: S^n \to S^n$, 我們証明了定理 4.7 和引理 4.8. 这些命题——更普遍的一些命题的特殊情形——可以用下面的基本定理証明.

定理 4.9.(同伦扩张定理). 設 K 是一个有限单純复合形, L 是一个閉子复合形. 設 $f_0: K \to Y$, 並且設 $g_t: L \to Y$ 使得 $g_0 = f_0|L$. 于是 f_0 容許一个同伦 $f_t: K \to Y$, 使得 $f_t|L = g_t$.

首先应該注意, 引理 3.1 很快地导出这个定理的一个特殊情形, 即当 K 是一个 n 維单純形而 L 是它的边界时. 現在, 对于 $K-L$ 的每一个頂点定义 $f_t(\sigma^0)=f_0(\sigma^0)$, 并且由引理 3.1 把 g_t 扩张到 $K-L$ 的 1 維单純形上. 这一个过程可以再应用到 $K-L$ 的 2 維单純形上, 如此継續下去, 直到 g_t 已經扩张到整个 K 上.

对上面的这个証明作一个詳細的考察, 就知道系 4.10 是正确的.

系 4.10. 如果还假定对于某一个閉子复合形 M, $f_0(M) \subset Y_0$ 和 $g_t(L \cap M) \subset Y_0$, 那末我們可以选擇 f_t 使得 $f_t(M) \subset Y_0$.

定理 4.9 将应用于以后的章节. 引理 4.8 的最初証明可在 J. H. C. Whitehead: "On $\pi_r(V_{n,m})$ and sphere-bundles", *Proc. London Math. Soc.*, 48 (1944), p. 281 中見到, 这个証明基于同伦扩张定理.

現在假定 C 是 Y_0 中的任意一条从 y_0 到 y_1 的路綫. 給定一个映象 $f_1 \in M_n(Y, Y_0, y_1)$ 代表 $\alpha_1 \in \pi_n(Y, Y_0, y_0)$. 我們要示明如何象 § 3 中那样可以把 f_1 沿着 C^{-1} 变形到一个映象 $f_0 \in M_n(Y, Y_0, y_0)$. 設 $F''': I^{n-1} \times 0 \cup \dot{I}^{n-1} \times I \to Y_0$ 由 $F'''(x,0) = f_1(x)$, $x \in I^{n-1}$; $F'''(x, t) = C(1-t)$, $x \in \dot{I}^{n-1}$, $t \in I$ 給定. 据引理 3.1, F''' 可以扩张成 $F'': I^{n-1} \times I \to Y_0$. 定义 $F': I^n \times 0 \cup \dot{I}^n \times I \to Y$ 为

$$F'(x, 0) = f_1(x),\ x \in I^n,\ F'|I^{n-1} \times I = F'',$$
$$F'(x, t) = C(1-t),\ x \in J^{n-1},\ t \in I.$$

再一次地用引理 3.1，我們就把 F' 扩张成 $F: I^n \times I \to Y$．于是 F 是 f_1 的一个同伦，在这一同伦下，I^{n-1} 保留在 Y_0 中而 J^{n-1} 的象点描出 C^{-1}．定义 f_0 为 $f_0(x)=F(x, 1)$，$x \in I^n$，我們看出 $f_0 \in M_n(Y, Y_0, y_0)$．設 $[f_0] = \alpha_0 \in \pi_n(Y, Y_0, y_0)$．

定理 4.11. 对应 $\alpha_1 \to \alpha_0$ 导出 $\pi_n(Y, Y_0, y_1)$ 到 $\pi_n(Y, Y_0, y_0)$ 上的一个同构，这个同构只依赖于 $C: I, 0, 1 \to Y_0, y_0, y_1$ 的同伦类．

証明的过程如同定理 3.2．由于这两个証明非常类似，我們只給出相当于引理 3.3 的引理的詳細証明，定理証明中的其余部分就让讀者自己作一些形式上的变动．

引理 4.12. 設 $F: I^n \times I, \dot{I}^n \times I \to Y, Y_0$ 是 $f, f' \in M_n(Y, Y_0, y_0)$ 間的一个同伦，使得 $F(x, t) = \lambda(t)$，$x \in J^{n-1}$，其中 $\lambda(t)$ 是一条零伦迴綫（在 Y_0 內）．于是 $[f] = [f'] \in \pi_n(Y, Y_0, y_0)$．

我們給定一个映象 $\mu: I \times I \to Y_0$，适合于

$$\mu(t, 0) = \lambda(t),\ \mu(t, 1) = \mu(0, u) = \mu(1, u) = y_0.$$

定义 $j'''': I^{n-1} \times I \times 0 \cup \dot{I}^{n-1} \times I \times I \to Y_0$ 为 $j''''(x, t, 0) = F(x, t)$，$x \in I^{n-1}$，$t \in I$，$j''''(x, t, u) = \mu(t, u)$，$x \in \dot{I}^{n-1}$，$(t, u) \in I \times I$．于是，由引理 3.1 的一个簡易的推广，$j''''$ 可以扩张成

$$j''': I^{n-1} \times I \times I \to Y_0.$$

定义 $j'': \dot{I}^n \times I \times I \to Y_0$ 为

$$j''|I^{n-1} \times I \times I = j''',\ j''(x, t, u) = \mu(t, u),\ x \in J^{n-1},$$

并且定义 $j': I^n \times I \times 0 \cup \dot{I}^n \times I \times I \to Y$ 为

$$j'|\dot{I}^n \times I \times I = j'',\ j'(x, t, 0) = F(x, t),\ x \in I^n,\ t \in I.$$

最后，我們再次用引理 3.1 而把 j' 扩张成 $j: I^n \times I \times I \to Y$．于是所需要的 f 与 f' 間的同伦是 $F_1 + F_2 + F_3$，其中 F_1, F_2, F_3: $I^n \times I, I^{n-1} \times I, J^{n-1} \times I \to Y, Y_0, y_0$ 由

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, t) &= j(x, 0, t) \\ F_2(x, t) &= j(x, t, 1) \\ F_3(x, t) &= j(x, 1, 1-t) \end{aligned}\right\} x \in I^n,\ t \in I$$

給出．

这样就完成了引理的証明. 这时定理 4.11 就可以完全类似于定理 3.2 那样来証明.

我們已經看到 $\pi_n(Y, y_0, y_0) = \pi_n(Y, y_0)$. 又因为 C 是 Y_0 中的一条路綫, 如果 $Y_0 = y_0$, 则上面所描述过的运算就沒有意义. 因此上面那个运算,严格地說,不能認作是作用于絕对同伦羣上的运算的推广. 另一方面, 我們已經有 (取 $y_0 = y_1$) $\pi_1(y_0, y_0)$ 作为 $\pi_n(Y_0, y_0)$ 的运算羣. 由于 Y_0 中的任意的一条迴綫自然也就是 Y 中的一条迴綫, 我們同样地有 $\pi_1(Y_0, y_0)$ 作为 $\pi_n(Y, y_0)$ 的运算羣. 这一情形以后将另在第四章中[1]研究.

羣 $\pi_n(Y, Y_0, y_0)$, $\pi_n(Y, Y_0, y_1)$, $\cdots$ 互相同构, 它們的抽象羣叫作偶 (Y, Y_0) 的 n 維相对同伦羣.

§ 3 中其余的定义和定理都可以同样地把它們"相对化". 这样, 如果对于任意两点 $y_1, y_2 \in Y_0$ 以及 Y_0 中以 y_1, y_2 为端点的任意两条路綫 C_1, C_2 有 $C_1^* = C_2^*: \pi_n(Y, Y_0, y_2) \to \pi_n(Y, Y_0, y_1)$, 我們就說偶$(Y, Y_0)$是 n-单式的; 如同以前那样, 就有对 (Y, Y_0) 是 n-单式的, 当而且只当对于某一 $y_0 \in Y_0$, $\pi_1(Y_0, y_0)$ 在 $\pi_n(Y, Y_0, y_0)$上的作用是平凡的. 如果(Y, Y_0)单 n-单式的, 則 $\pi_n(Y, Y_0($ 的一个元素由一个映象 $f: I^n, \dot{I}^n \to Y, Y_0$ (或一个映象 $f: E^n, S^{n-1} \to Y, Y_0$) 唯一地决定[2]. 自然, 如果 $\pi_n(Y, Y_0, y_0)$ 中的元素是由映象 $f: E^n, S^{n-1}, p_0 \to Y, Y_0, y_0$ 代表, 則 $\pi_1(Y_0, y_0)$ 中的运算子就通过 f 的形变来定义, 在这一形变下, S^{n-1} 保留在 Y_0 內而 p_0 的象描繪出 $\pi_1(Y_0, y_0)$的这一运算子的逆同伦类中的一条迴綫.

如果存在映象 $f: Y, Y_0 \to Z, Z_0$, $g: Z, Z_0 \to Y, Y_0$, 使得 $gf \sim 1: Y, Y_0 \to Y, Y_0$, $fg \sim 1: Z, Z_0 \to Z, Z_0$.

定理 4.13. 相对同伦羣是(相对)同伦型的不变量.

这个定理可以从引理 4.14 形式地推出, 正如定理 3.5 由引理 3.6 得出那样.

---

1) 第四章 § 4 中, 我們还要对 $\pi_1(Y_0, y_0)$ 在 $\pi_2(Y, Y_0, y_0)$ 上的运算作一个代数的研究.

2) 参閱定理 3.4.

引理 4.14. 任意一个映象 $f: X, X_0, x_0 \to Y, Y_0, y_0$ 导出一个同态 $f^*: \pi_n(X, X_0, x_0) \to \pi_n(Y, Y_0, y_0)$. 如果

$$g: Y, Y_0, y_0 \to Z, Z_0, z_0, \text{ 則 } g^* f^* = (gf)^*.$$

設 $\alpha \in \pi_n(X, X_0, y_0)$ 由

$$h: I^n, I^{n-1}, J^{n-1} \to X, X, x_0$$

代表. 于是 fh 是一个映象 $I^n, I^{n-1}, J^{n-1} \to Y, Y_0, y_0$. 定义 $f^*(\alpha) = [fh]$. 这时引理的証明是初等的.

第三章　同伦論中几个典型的定理

（整个这一章的标准参考书是李夫希兹(Lefschetz)所著 Introduction to Topology，普林斯頓数学丛书第 11 种，1949 年普林斯頓大学出版，我們以后把它簡記作 **L**）。

1. 单純逼近定理． 設 $K, L, \cdots$ 代表有限单純复合形，并且設 $|K|, |L|, \cdots$ 代表与它們相应的多面体．对于一个复形的重心重分和一个单純形的重心坐标系等概念，可以参看 **L**．

給定一个把 K 的頂点变到 L 的頂点的变換，并且还要求它把 K 的一个单純形的頂点变到 L 的一个单純形的頂点．在每一个单純形內对于它的重心坐标作綫性扩充，就能把这一个变換扩张成一个映 $|K|$ 入 $|L|$ 的映象，这样的一个映象叫作是单純的或綫性的．一个映 $|K|$ 入 $|L|$ 的单純映象，即使在 K 的某些单純形上退化，仍然导出一个映 K 的鏈入 L 的鏈的一个鏈映射，即映 K 的整数[1]鏈入 L 的整数鏈的同态映象 $h_n: C_n(K) \to C_n(L)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 的一个集合，并且使得

$$\partial_n h_n = h_{n-1} \partial_n, \; n = 1, 2, \cdots,$$

其中的 ∂_n 是(下同調)边緣运算．在不致引起誤会的地方，我們常用同一个字母来表示单純映象和由它所导出的鏈映射．

定理 1.1（**单純逼近定理**）．每一个映 $|K|$ 入 $|L|$ 的映象同伦于一个单純映象 $|K_1| \to |L|$，其中的 K_1 是 K 的一个适当的重分．

証明在上述 **L** 书中的第四章 § 4 中給出．

定理 1.2． $\pi_r(S^n) = 0, \; r < n.$

設 $\alpha \in \pi_r(S^n)$ 由一个映象 $f: S^r, p_0 \to S^n, q_0$ 代表，其中 p_0, q_0 被选定作 S^r, S^n 內的基点．給定 S^r, S^n 的单純結构．于是 $f \sim f'$: $S^r \to S^n$，其中 f' 对于 S^r 的单純結构的某一重分是单純的．这时

---

1) 我們只涉及整数系数的同調論．

$f'(S^r)$不包含維数 $\geqslant 2$ 的单純形，所以 $f'(S^r)$ 不会是整个的 S^n. 設 $f'(p_0) = q_1$. 于是 $f'(S^r)$ 在 S^n 上可以縮成一点 rel p_0，从而 f' 代表 $\pi_r(S^n, q_1)$ 中的零元素. 这样，在 $\pi_r(S^n, q_0)$ 和 $\pi_r(S^n, q_1)$ 的某一个同构中，α 就对应到零，从而 $\alpha = 0$，而定理証毕.

应該注意，設取 p_0 和 q_0 作为复蓋 S^r 和 S^n 的复形的頂点，然后把 p_0 在同伦映象下的象保持为 q_0，則可以略为簡化定理的証明. 參看定理 1.1 的証明，示明这样是可能的.

2. 勃劳威度数. 設 $f: S_1^n \to S_2^n$ 是映 S_1^n 入 S_2^n 的映象. 設对于 S_1^n，S_2^n 取好了三角剖分，并且設 $f \sim f': S_1^n \to S_2^n$，其中 f' 对于 S_1^n 的三角剖分的某一重分是单純的. 这时，在一个定向 n 維球的任意三角剖分上，存在一个基本[1] n 維閉鏈 (无限循环的整数系数 n 維同調羣的正生成元). 設 $\gamma_i^n (i = 1, 2)$ 是 $S_i^n (i = 1, 2)$ 上已給定的三角剖分上的基本 n 維閉鏈，其中 S_1^n 是适当地重分好的. 单純映象 f' 所导出的鏈映象 f' 把閉鏈变为閉鏈，因而 $f'(\gamma_1^n) = d\gamma_2^n$，$d$ 是某一整数. 这时的 d 叫作是映象 f 的勃劳威 (Brouwer) 度数. 勃劳威証明了下面的基本定理:

定理 2.1. 映象 $f: S_1^n \to S_2^n$ 的度数 d 只依賴于 f 的同伦类.

証明在书 **L** 的第四章 § 5 中給出. 我們注意，由度数的定义和定理 2.1 得出的下面几个直接結果.

(A) 一个形变[2] $S^n \to S^n$ 的度数是 1 (由于恆等映象有度数 1).

(B) 一个非本質的映象的度数是 0 (由于常值映象有度数 0).

(C) 如果 $f: S_1^n \to S_2^n$ 有度数 d 和 $g: S_2^n \to S_3^n$ 有度数 d'，則 gf 有度数 dd'.

---

1) 如果 $\sigma_1^n, \cdots, \sigma_t^n$ 是已給的三角剖分的 n 維单純形，它們的定向与 n 維球上給定的定向一致，則 $\gamma_i^n = \sum_{i=1}^{t} \sigma_i^n$.

2) 一个形变 $f: S^n \to S^n$ 是一个映象，使得 $f \sim 1: S^n \to S^n$.

(D) 对应 $f \to d(f)$ 导出[1] $\pi_n(S^n)$ 到整数羣内的一个同态.

我們来証明(D). 无疑, $f \to d(f)$ 导出 $\pi_n(S^n)$ 到 Z_∞ 的、整数羣内的一个单值对应. 現在設 $f, g: S_1^n \to S_2^n$ 代表 $\alpha, \beta \in \pi_n(S^n)$. 我們可以假定 f, g 聚建在 S_1^n 的某一个三角剖分的不相交的子复形 P, Q 上, 此外还假定它們对于 S^n 的某一个三角剖分是单純的. 这样, 如果 $h: S_1^n \to S_2^n$ 由 $h|P = f$, $h|Q = g$, $h(x) = q_0$, $x \in S_1^n - (P \cup Q)$, q_0 是 S^n 内的基点所給定, 則 h 代表 $\alpha + \beta$ 并且 h 是单純的. 設 f, g, h 同样也代替各自导出的鏈映象. 于是

$$f(\gamma_1^n) = d(\alpha)\gamma^n, \quad g(\gamma_1^n) = d(\beta)\gamma^n,$$

且由于 P 和 Q 不相交, 我們有

$$h(\gamma_1^n) = f(\gamma_1^n) + g(\gamma_1^n) = (d(\alpha) + d(\beta))\gamma^n,$$

其中 $d(\alpha) = d(f)$, $d(\beta) = d(g)$. 由于 $h(\gamma_1^n) = d(h)\gamma^n$ 并且 h 代表 $\alpha + \beta$, 这就証明了(D). 如果 $n = 1$, 我們还需認定在已給的 S_1^n 的定向中, σ_1^n 超在 σ_2^n 的前面.

我們可以对于映象 $E_1^n, S_1^{n-1} \to E_2^n, S_2^{n-1}$ 和映象 $E_1^n, S_1^{n-1} \to S_2^n, p_2$ 来推广度数的概念, 其中 E_i^n $(i = 1, 2)$ 是一个以 S_i^{n-1} 为边界的 n 維元体. 在第一种情形, 我們説 $f: E_1^n, S_1^{n-1} \to E_2^n, S_2^{n-1}$ 的度数就是指 $f | S_1^{n-1}: S_1^{n-1} \to S_2^{n-1}$ 的度数. 在第二种情形, 我們説 $g: E_1^n S_1^{n-1} \to S_2^n, p_2$ 的度数就是指 $g\phi_n^{-1}: S_1^n \to S_2^n$ 的度数, 其中 ϕ_n 是在第二章 §2 中定义过的那个映象[2]. 从定理 2.1 知道度数同样地是映象 $E_1^n, S_1^{n-1} \to E_2^n, S_2^{n-1}$ 或映象 $E_1^n, S_1^{n-1} \to S_2^n, p_2$ 的同伦类的一个不变量.

---

1) 在不致引起誤会的地方我們就略去同伦羣記号中的基点.

2) 我們把映象 $\phi_n: E_+^n \to S^n$ 恒同于由 $f(x_1, \cdots, x_n) = \phi_n(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$ 給定的映象, 其中 E^n 是在北半球 E_+^n 的赤道上超平面上的垂直射影. 在这一节我們將写作 $\phi_n: E^n, S^{n-1} \to S^n, p_0$ 或 $\phi_n: E_1^n, S_1^{n-1} \to S_1^n, p_1$, 其中 E_1^n 正是 E^n 的一个摹本而 $(S_1^n; p_1)$ 正是 (S^n, p_0) 的一个摹本.

勃劳威关于度数定理的逆定理由霍卜夫(Hopf)給以証明. 合并两个定理,就得到:

定理 2.2. 兩个映象 $f, g: S_1^n \to S_2^n$ 是同伦的，当而且只当它們有相同的度数.

霍卜夫定理的証明在书 **L** 的第四章 § 6 中給出. 对 n 用归納法,同时証明了:

定理 2.3. 兩个映象 $f, g: E_1^n, S_1^{n-1} \to E_2^n, S_2^{n-1} (n \geqslant 2)$ 是同伦的,当而且只当它們有相同的度数.

我們証明一个容易的推論.

定理 2.4. 兩个映象 $f, g: E_1^n, S_1^{n-1} \to S_2^n, p_2$ 是同伦的，当而且只当它們有相同的度数.

設 f, g 有相同的度数，于是 $f\phi_n^{-1}$ 和 $g\phi_n^{-1}$ 有相同的度数，由定理 2.2 就有 $f\phi_n^{-1} \sim g\phi_n^{-1}$，从而 $f \sim g$. 反之，設 $f \sim g$，于是在第二章定理 2.1 的証明过程中有 $f\phi_n^{-1} \sim g\phi_n^{-1}$. 这样，从定理 2.2 (或定理 2.1)，$f\phi_n^{-1}$ 和 $g\phi_n^{-1}$ 有相同的度数，由定义因而 f 和 g 有相同的度数.

从(**C**)得到任何一个拓扑映象有度数 ± 1. 如果一个拓扑映象有度数 $+1$ (-1). 我們就說这个拓扑映象是顺向的(反向的). 由定理 2.2，任意两个映 S_1^n 到 S_2^n 上顺向的拓扑映象是同伦的. 特别，S^n 到它自身上的一个顺向拓扑映象同伦于常值映象. 类似地,任意两个映 E_1^n, S_1^{n-1} 到 E_2^n, S_2^n 上顺向的拓扑映象是同伦的. 这样,如前章所指出，在映象 $E^n, S^{n-1}, p_0 \to Y, Y_0, y_0$ 的同伦类和映象 $I^n, \dot{I}^{n-1}, J^{n-1} \to Y, Y_0, y_0$ 的同伦类間所建立的一一对应不依賴于顺向的拓扑映象

$$I^n, \dot{I}^n \to E^n, S^{n-1}$$

的特殊选择；并且羣 $\pi_n(Y, Y_0)$ 的代数构造不依賴于用作原象集的是一个 n 維方体还是一个欧几里得 n 維方体.

設 $f: E_1^n, S_1^{n-1} \to S_2^n, p_2$ 是任意的映象,使得 $f|E_1^n - S_1^{n-1}$ 是一个到 $S_2^n - p_2$ 上的拓扑映象. 設 $\phi_n: E_1^n, S_1^{n-1} \to S_1^n, p_1$ 是在第二章 § 2 中的那个映象. 这时 $f\phi_n^{-1}: S_1^n, p_1 \to S_2^n, p_2$ 把 $S^n - p_0$ 拓扑

地映成 $S_2^n - p_2$，因而是一个拓扑映象.

如果 $f\phi_n^{-1}$ 有度数 $+1$，即如果 f 自己有度数 $+1$，我們就說 f 是順向的. 于是任意两个容許的順向映象 $f, f': E_1^n, S_1^{n-1} \to S_1^n, p_1$ 是同伦的[1]. 特别，任意一个有度数 1 的映象 $f: E_1^n, S_1^{n-1} \to S_1^n, p_0$ 同伦于 ϕ_n，因而証明了在映象

$$E^n, S^{n-1} \to Y, y_0$$

的同伦类和映象 $S^n, p_0 \to Y, y_0$ 的同伦类間建立的一一对应不依賴于映象 ϕ_n 的特殊选择；并且羣 $\pi_n(Y)$ 的代数构造不依賴于究竟是一个 n 維方体或是一个欧几里得欧維元体，还是一个 n 維球用作原象集.

現在可以很便利地一次解决 I^n 和 S^n 的定向問題. 我們用归納法进行，首先把 I^n 包在 n 維欧氏空間中，作为是点 $(x_1, x_2, \cdots, \cdots, x_n)$ 的集合，其中 $-1 \leqslant x_i \leqslant 1, i = 1, 2, \cdots, n$. 我們把 I^1 定向作从 -1 到 $+1$ 的有向綫段. 設 E^n 是由 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1$ 所給定的 n 維元体. 我們假定 S^{n-1} 有了定向，这就导出对 E^n, S^{n-1} 的一个定向. 然后定向 S^n 为使得 ϕ_n 是順向的，而定向[2]偶 $I^n, \dot{I}^n$ 为使得径向投射

$$E^n, S^{n-1} \to I^n, \dot{I}^n$$

是順向的. 由于我們可以从 $n = 1$ 开始，这时 $S^0 = \dot{E}^1 = \dot{I}^1$，这就完成了这一归納定义. 固定定向后，我們約定 $\pi_n(Y, y_0)$ 的恆等元素由映象 $f: E^n, S^{n-1} \to Y, y_0$ 代表，而如果 $f\phi_n^{-1} \sim g: S^n, p_0 \to Y, y_0$，也用 $g: S^n, p_0 \to Y, y_0$ 来代表.

定理 2.5. 設 $f: E_+^n, S^{n-1} \to Y, Y_0$ 由定义 $f(E_-^n) = y_0$ 而扩張成

$$f': S^n, p_0 \to Y, y_0.$$

于是 f 和 f' 就代表 $\pi_n(Y, y_0)$ 中同一个元素.

由定义 $\bar{\phi}_n(E_-^n) = p_0$，这时映象 $\phi_n: E_+^n, S^{n-1} \to S^n, p_0$ 可以扩

1) 这也就是說 f 和 f' 是 $E_1^n - S_1^{n-1}$ 到 $S_1^n - p_1$ 上的拓扑映象，自然地，我們可以把"順向"这一术語推广到任意一个具有度数 1 的映象 $E_1^n, S_1^{n-1} \to S_1^n, p_1$ 上.

2) 精確地說，$I^n, \dot{I}^n$ 的一个定向是 $H_n(I^n, \dot{I}^n)$ 的一个生成元.

张成 $\bar{\phi}_n$: $S^n, p_0 \to S^n, p_0$. 我們已經証明过 $\bar{\phi}_n \sim 1$: $S^n, p_0 \to S^n, p_0$. 注意到

$$f\phi_n^{-1} = f'\bar{\phi}_n^{-1}: S^n, p_0 \to S^n, p_0,$$

这一定理就可以証明，这是因为它蘊含 $f\phi_n^{-1} \sim f'$: $S^n, p_0 \to S^n, p_0$, 并且由于我們約定的迭合关系，$f\phi_n^{-1}$ 和 f 就代表着 $\pi_n(Y, y_0)$ 中同一个元素.

定理 2.5 給了我們一个有用的規則，当 $\pi_n(Y)$ 的 n 維元体的代表映象給定时，就能用球面映象代表 $\pi_n(Y)$ 中給定的元素.

最后，我們証明定理 2.2 和(D)的一个特別結果.

定理 2.6. $\pi_n(S^n)$是无限循环的.

我們把 $\pi_n(S^n)$ 中的元素考虑作 S^n 到它自身的映象的同伦类. 如果 $\alpha \in \pi_n(S^n)$, 我們用 $d(\alpha)$ 来記 α 中任意一个映象的度数. 我們已經看到 $\alpha \to d(\alpha)$是 $\pi_n(S^n)$ 到整数 (加) 羣內的一个同态. 由于恆等映象有度数 1，它是到整数羣上的一个同态. 現在假定 $n \geqslant 2$. 由于两个映象

$$f, g: S^n, p_0 \to S^n, p_0$$

間的同伦，只当它們有相同的度数时，就如同 $f, g: S^n \to S^n$ 間的同伦，并且由于 S^n 是单連通的，当 $f, g: S^n, p_0 \to S^n, p_0$ 有相同的度数，它們就代表 $\pi_n(S^n)$中同一个元素，所以 $\alpha \to d(\alpha)$ 是一个同构.

$n=1$ 的情形略为有点不同. 圓周的基本羣是无限循环的这一事实有着許許多多的証明. 或者这样会是最便利的，注意到书 L 124 頁定理 2.2 ($n = 1$ 的情形) 的李夫希兹的証明中，如果 f 解释作一个映象 $S^1, p_0 \to S^1, p_0$ 并且 p_0 是点"0 mod 1"，则联接一个映 S^1 入 S^1 且有度数 ρ 的映象 f 和一个有度数 ρ 的标准映象 g (自乘 ρ 次) 的同伦就的确使得 p_0 保持不动. 因而有相同度数的两个映象 $S^1, p_0 \to S^1, p_0$ 間的同伦，事实上如同映象 $S^1, p_0 \to S^1, p_0$.

系 2.7. 对于所有 r, S^n 是 $\bar{r}$-单式的.

如果 $n > 1$, 这就从定理 1.2 得出.

如果 $n = 1$, 这就从定理 2.6 和第五章系 1.6 得出.

3. 希立維兹同构定理. 在前一章中我們証明了 $\alpha \to d(\alpha)$ 是

$\pi_n(S^n)$ 到整数羣内（其实是上）的一个同态（其实是同构）．現在我們把它推广如下．設 K 是一个有限連通的单純复合形，并且設 σ^0 是 K 的一个頂点．設 $\alpha \in \pi_n(|K|, \sigma^0)$ 由一个单純映象 $f: S^n, p_0 \to |K|, \sigma^0$ 代表，S^n 被給定了某一个三角剖分．这时，如果 γ^n 是 S^n 上的基本（整数）n 維閉鏈，則 $f(\gamma^n)$ 是 K 的一个 n 維閉鏈，并且，如同在 $K = S^n$ 的情形那样，就有 $f(\gamma^n)$ 的同調类不依賴于 f 在它的同伦类中的选择．因此"$\alpha \to f(\gamma^n)$ 的同調类"导出一个对应

$$\omega: \pi_n(|K|, \sigma^0) \to H_n(K).$$

完全和特殊情形类似，我們可以証明 ω 是一个同态．另一方面，如果 $|K|$ 不是 n-单式的，它不会是一个同构；因为能够很快地看出，$\pi_n(|K|, \sigma^0)$ 中由 $\pi_1(|K|, \sigma^0)$ 里的一个运算所結合的两个元素有相同的 ω-象．虽然如此，但在希立維茲引进同伦羣概念最初的一些論文中，他証明了下面的基本定理．

定理 3.1. 如果 $\pi_r(|K|) = 0$, $r = 1, \cdots, n-1 (n \geqslant 2)$，則 $\omega: \pi_n(|K|) \approx H_n(K)$.

定理的証明在书 L 第五章 §.5 中給出．下面所証明的結果[1]，假若不經过清晰的陈述是談不上有什么价值的．

定理 3.2. 如果 $\alpha \in \pi_n(|K|)$ 使得 $\omega(\alpha) = 0$，則 α 可以由一个映象 $f: S^n \to |K^{n-1}|$ 所代表．

可以这样說，同伦論的基本困难在于这样一个是零調的映象一般地并不是零伦的．定理 3.1 由应用下面的引理而从定理 3.2 得出，下面的这个引理是具有普遍的重要性的．

引理 3.3. $\pi_r(Y) = 0$, $r = 1, \cdots, n-1$，当而且只当每一个映維数 $\leqslant n-1$ 的一个多面体入 Y 的映象是零伦的．

充分性显然．現在設 $f: K^{n-1} \to Y$ 是一个映一个 $(n-1)$ 維复合形[2] 入 Y 的映象．由于 Y 是弧式連通的，我們可以假定

---

1) 記号 K^r 以后始終用作代表維数不超过 r 的单純形所組成的复合形．

2) 如果不会引起誤解，用同一个記号代表复合形和与它相应的空間是很方便的．我們要指出，在这一个引理和引理 3.6 的証明中"混用名詞"是有益处的．

$f(K^r)=y_0$. 如果 $r<n-1$，設 σ^{r+1} 是 K^{n-1} 的任意一个 $(r+1)$ 維单純形。于是 $f|\sigma^{r+1}$ 是一个映象 $\sigma^{r+1}, \dot{\sigma}^{r+1}\to Y, y_0$. 由于 $\pi_{r+1}(Y)=0$，則

$$f|\sigma^{r+1}\sim f'':\sigma^{r+1}, \dot{\sigma}^{r+1}\to Y, y_0,$$

且 $f''(\sigma^{r+1})=y_0$. 对于每一个 $(r+1)$ 維单純形，我們可以依照这一方法进行，所得到的一个映象我們仍然叫作 f''，它使得 $f|K^{r+1}\sim$ $\sim f'':K^{r+1}, K^r\to Y, y_0$ 并且 $f''(K^{r+1})=y_0$. 从同伦扩张定理（第二章定理 4.9），这时 f'' 可以扩张成 $f'':K^{n-1}\to Y$，使得

$$f\sim f'\sim f'':K^{n-1}\to Y \text{ 和 } f''(K^{r+1})=y_0.$$

継續依这一方法进行，直到我們达到所需要的常值映象.

这一节的内容都可以相对化地推广. 如果 L 是 K 的一个閉子复合形而 f 是一个映 E^n, S^{n-1} 入 $|K|$, $|L|$ 的单純映象，則 $E^n \bmod S^{n-1}$ 的基本相对閉鏈在鏈映射 f 下的象是 $K \bmod L$ 的某一个相对閉鏈，它的同調类只依賴于 $\pi_n(|K|, |L|)$ 中由 f 所代表的元素. 这样，我們就得到了一个同态. ω: $\pi_n(|K|, |L|)\to H_n(K, L)$. 定理 3.1 这时可以相对化地推广为：

定理 3.4. 如果 $\pi_r(|K|, |L|)=0$, $r=1,\cdots,n-1$ $(n\geqslant 2)$，並且 $(|K|, |L|)$ 是 n-單式的，則 $\omega:\pi_n(|K|, |L|)\approx H_n(K, L)$.

証明用到

定理 3.5. 如果 $\alpha\in\pi_n(|K|, |L|)$ 使得 $\omega(\alpha)=0$，並且 $(|K|, |L|)$ 是 n-單式的，則 α 由一个映象

$$f:E^n, S^{n-1}\to |K^{n-1}|\cup|L|, |L|$$

所代表.

定理3.4这时由定理 3.5 和下面的引理得到.

引理 3.6.[1] $\pi_r(Y, Y_0)=0$, $r=1,\cdots,n-1$，当而且只当每一个映維數 $\leqslant n-1$ 的一个多面体入 Y 的映象可以变形为映入 Y_0.

充分性显然. 現在設 $f:K^{n-1}\to Y$ 是一个映一个 $(n-1)$ 維

1) 原引理敍述不妥，正确的提法是：空間偶 (y, y_0) 为 $(n-1)$-連通的充要条件为：設 P 为任一(有限)多面体，P_0 为 P 的子多面体，(P, P_0) 有单純剖分 (K, K_0) 且 $\dim(P-P_0)\leqslant n$，則 $f\sim f':(p, p_0)\to(y, y_0)$ 而 $f'(P)\subset Y_0$——譯者註.

复合形入 Y 的映象. 由于 Y 是弧式連通的,我們可以假定 $f(K^0) = y_0$. $\pi_1(Y, Y_0)$ 等于零意思是指(約定地)任意一个映象 $I^1, \dot{I}^1 \to Y, y_0$ 可以变形为一个映象 $I^1, \dot{I}^1, \to Y_0, y_0$. 把它应用到每一个 1 維单純形上,然后用同伦扩张定理,我們发現 f 同伦于一个映象 $f': K^{n-1} \to Y$, 使得

$$f'(K^1) \subset Y_0 \text{ 和 } f'(K^0) = y_0.$$

現在假定 $f \sim f^{(r)}: K^{n-1} \to Y$ 使得 $f^{(r)}(K^r) \subset Y_0$ 和 $f^{(r)}(K^0) = y_0$. 如果 $r < n-1$, 設 σ^{r+1} 是 K^{n-1} 的任意一个 $(r+1)$ 維单純形. 于是 $f^{(r)}|\sigma^{r+1}$ 是一个映象 $f^{(r)}|\sigma^{r+1}: \sigma^{r+1}, \dot{\sigma}^{r+1}, \sigma^0 \to Y, Y_0, y_0$, 其中的 σ^0 是 σ^{r+1} 的某一个頂点. 由于 $\pi_{r+1}(Y, Y_0) = 0$, 存在一个同伦

$$f_t: \sigma^{r+1}, \dot{\sigma}^{r+1}, \sigma^0 \to Y, Y_0, y_0,$$

且 $f_0 = f^{(r)}|\sigma^{r+1}$, $f_1(\sigma^{r+1}) = y_0$. 代替 σ^{r+1} 为 $x_1^2 + \cdots + x_{r+1}^2 \leqslant 1$ 所給定的 $(n+1)$ 維欧几里得元体 并且假設 S_λ^r 是"緯度" $x_1^2 + \cdots + x_{r+1}^2 = \lambda$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. 定义

$$f_t': E^{r+1}, S^r, p_0 \to Y, Y_0, y_0$$

为

$$\begin{aligned} f_t'(S_\lambda^r) &= f_t(S_{(1+t)\lambda}^r), & 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}, \\ &= f_{2t(1-\lambda)}(S_{\lambda+t(1-\lambda)}^r), & \frac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant 1. \end{aligned}$$

于是 $f_0' = f_0$, $f_t'(S^r) = f_t'(S_1^r) = f_0(S_1^r)$, 并且 $f'(E^{r+1}) \subset Y_0$. 这样, 回到 σ^{r+1}, 我們証明了可以选择 $f^{(r)}|\sigma^{r+1}$ 的一个同伦, 它不改变 $f^{(r)}|\dot{\sigma}^{r+1}$ 并且把 $\dot{\sigma}^{r+1}$ 的象映入 Y_0. 这以后証明就完全和定理 3.1 类似.

定理 3.4 的証明非常相似于定理 3.1 (如同书 **L** 中給出的). 不过,在証明 ω 是到 $H_n(K, L)$ 上时有着某些不同, 这一不同归結为对定理中这一部分証明的一个合式的陈述.

我們假定定理 3.4 中的条件满足[1], 并且設 $z^n = \Sigma\mu_i\sigma_i^n$ 是

1) 对于在上的性質,对 $(|K|, |L|)$ 的 n-单式是不需要的.

$K \bmod L$ 的某一个整数 n 維相对閉鏈. 从引理 3.6, 这时我們可以把恆等映象 $K \to K$, rel L 变形为一个映象 $f: K \to K$, 使得 $f(K^{n-1}) \subset L$. 我們可以把 f 看作是一个单純映象 $K_1 \to K$, 其中 K_1 是 K 的一个重分[1]. 設 z_1^n 是 z^n 在 K_1 上的重分. 于是 $f(z_1^n)$ 是 $K \bmod L$ 的一个閉鏈和 z^n 在同一个同調类中. 此外, $f(z_1^n)$ 还是一个形式为 $\Sigma \mu_i C_i^n$ 的一个鏈,其中的 C_i^n 是一个边界在 L 中的鏈, 并且它是 K 的一个重分了的单純形在 f 下的象. 于是鏈 C_i^n 的同調类生成 $H_n(K, L)$, 并且每一个类显然是 $\pi_n(|K|, |L|)$ 的一个元素在 ω 下的象.

希立維茲定理对于相对情形的推广是由希立維茲本人[2]首先发表的. 用連續同調論, 他确立了一般弧式連通的豪斯道夫空間絕对的及相对的同构定理. 我們的目的原在于避免引入連續同調論,因此我們沒有把这些作更进一步的推广[3].

我們以定理 3.1 的一个应用作为本章的結束.

定理 3.7. 設 Y 是 m 个有唯一的一个共公点的 n 維球的併集 $n > 1$. 于是 $\pi_n(Y)$ 是一个有 m 个生成元的自由交換羣.

对定理 1.2 的証明作稍許的更改, 可以証明 $\pi_r(Y) = 0$, $r = 1, \cdots, n-1$, 而 $H_n(Y)$ 自然是 m 个无限循环羣的直接和. $\pi_n(Y)$ 的生成元是度数为 1 的一些映象 $S^n \to S_i^n$ $(i = 1, \cdots, m)$ 的同伦类.

---

1) 利用連續同調論,可以避免許多困难.

2) 在一篇講稿中.

3) 一般希立維茲定理的一个不十分詳細的处理, 參看胡世楨 (S. T. Hu) 的 "An exposition of the relative homotopy theorey", *Duke J. Math.*, 14 (1947), 991—1033 頁.

第四章　正合同伦序列

1. 序列的定义. 我們先来定义边緣同态 $d: \pi_n(Y, Y_0, y_0) \to \to \pi_{n-1}(Y_0, y_0)$, $n \geqslant 2$. 設

$$f: I^n, I^{n-1}, J^{n-1} \to Y, Y_0, y_0$$

代表 $\alpha \in \pi_n(Y, Y_0, y_0)$. 于是 $f | I^{n-1}: I^{n-1}, \dot{I}^{n-1} \to Y_0, y_0$ 代表一个元素 $\beta \in \pi_{n-1}(Y_0, y_0)$. 显然, β 只依賴于 α, 我們記作 $\beta = d(\alpha)$. d 显然是一个同态. 不仅如此, d 还是关于 $\pi_1(Y_0, y_0)$ 中的运算子的运算同态（即如果 $\xi \in \pi_1(Y_0, y_0)$, 則 $d\xi = \xi d'$）, 这是可以很快証明的. 等价地, 我們可以用一个映象 $f': E^n, S^{n-1}, p_0 \to Y, Y_0, y_0$ 代表 $\alpha \in \pi_n(Y, Y_0, y_0)$, 然后 $d(\alpha)$ 就将由 $f' | S^{n-1}: S^{n-1}, p_0 \to Y_0, y_0$ 代表. 以后我們不打算描述这一理論在 n 維元体和 n 維球体上的映象下的平行发展, 而把这一工作留給讀者.

恆等映象 $Y_0, y_0 \to Y_0, y_0$, $Y, Y_0, y_0 \to Y, Y_0, y_0$ 导出变换

$$i: \pi_n(Y_0, y_0) \to \pi_n(Y, y_0), \quad j: \pi_n(Y, Y_0) \to \pi_n(Y, Y_0, y_0),$$

它們显然是一些同态.

定理 1.1. i 和 j 是关于 $\pi_1(Y_0, y_0)$ 中運算子的運算同态.

設 $f: I^n \dot{I}^n, \to Y_0, y_0$ 代表 $\alpha \in \pi_n(Y_0, y_0)$, 并且設

$$f \sim f': I^n \to Y_0$$

是在这样的同伦下, 对它, $\dot{I}^n$ 中的象点描出一条代表 $\xi^{-1} \in \pi_1(Y_0, y_0)$ 的閉曲綫. 于是 $f': I^n, \dot{I}^n \to Y_0, y_0$ 代表 $\xi(\alpha)$. 这一个映象 f' 当看作是一个映象 $f': I^n, \dot{I}^n \to Y, y_0$, 代表着 $i(\xi(\alpha))$. 这时的 f, 当看作是一个映象 $f: I^n, \dot{I}^n \to Y, y_0$, 就代表着 $i(\alpha)$, 而 $f \sim f': I^n \to Y$ 是这样的一个同伦, 根据 $\pi_1(Y_0, y_0)$ 在 $\pi_n(Y, y_0)$ 上运算的定义, 它变元素 $i(\alpha)$ 为 $i(\xi(\alpha))$. 于是 i 是一个运算同态.

类似地, 設 $\alpha \in \pi_n(Y, y_0)$ 由 $f: I^n, \dot{I}^n \to Y, y_0$ 代表. 于是 f

的一个使得 $\dot{I}^n$ 的象点描出一条代表 $\xi^{-1}\in\pi_1(Y_0, y_0)$ 的閉曲綫的同伦，作为一个直接推論，也就是一个使得 I^{n-1} 保留在 Y_0 内而 J^{n-1} 的象点描出一条代表 $\xi^{-1}\in\pi_1(Y_0, y_0)$ 的閉曲綫的同伦。于是 $j(\xi(\alpha)) = \xi(j(\alpha))$.

现在我們能够来定义运算同态的序列[1]

$$\rightarrow\cdots\rightarrow\pi_{n+1}(Y, Y_0)\xrightarrow{d_{n+1}}\pi_n(Y_0)\xrightarrow{i_n}\pi_n(Y)\xrightarrow{j_n}\pi_n(Y, Y_0)\xrightarrow{d_n}\cdots$$

$$\cdots\rightarrow\pi_2(Y, Y_0)\xrightarrow{d_2}\pi_1(Y_0)\xrightarrow{i_1}\pi_1(Y)\xrightarrow{j_1}\pi_1(Y, Y_0)\rightarrow 0.$$

它叫作对 (Y, Y_0) 的**同伦序列**.

2. 正合性的証明.

定理 2.1. 偶 (Y, Y_0) 的同伦序列是正合的，意思是說每一个同态的核是前面一个的象.

我們需要証明下面六个結果.

(1a) $ji\pi_n(Y_0) = 0$, (1b) $j^{-1}(0)\subset i\pi_n(Y_0)$,

(2a) $dj\pi_n(Y) = 0$, (2b) $d^{-1}(0)\subset j\pi_n(Y)$,

(3a) $id\pi_{n+1}(Y, Y_0) = 0$, (3b) $i^{-1}(0)\subset d\pi_{n+1}(Y, Y_0)$.

(1a)的証明. 設 $\alpha\in\pi_n(Y_0)$ 由

$$f: I^n, \dot{I}^n\rightarrow Y_0, y_0$$

代表. 于是 $ji\alpha$ 由 $f: I^n, I^{n-1}, J^{n-1}\rightarrow Y, Y_0, y_0$ 代表，其中 $f(I^n)\subset\subset Y_0$. 因 I^n 可以縮成一点[2] $x_0=(0, 0, \cdots, 0)$，这就有 $ji\alpha=0$.

(1b)的証明. 設 $\alpha\in j^{-1}(0)$. 于是 α 由一个映象 $f_0: I^n, \dot{I}^n\rightarrow\rightarrow Y, y_0$ 代表，并且存在一个同伦

$$f_t: I^n, \dot{I}^n, x_0\rightarrow Y, Y_0, y_0,$$

使得 $f_1(I^n) = y_0$. 我們找一个同伦把 $\dot{I}^n$ 保持在 y_0，并且映 I^n 入

---

1) 尽管 $\pi_1(Y, Y_0)$ 不是一个羣，我們仍可以定义变换 $j_1:\pi_1(Y)\rightarrow\pi_1(Y, Y_0)$. 我們写 $\pi_1(Y, y_0)\rightarrow 0$ 是因为 Y_0 是弧式連通的，目的在于适合定理2.1. 注意到 $\pi_1(Y, Y_0) = 0$ 是指 Y 中的任意一条端点在 Y_0 內的路綫可以相对于它的端点变形为 Y_0 中的一条路綫.

2) 重新提一下，我們証明过映象 $I^n, \dot{I}^n, x_0\rightarrow Y, Y_0, y_0$ 的一个同伦不影响 f 所在的类.

Y_0. 为方便起見，在这一个証明中把 I^n 的坐标看作是从 -1 到 $+1$[1]. 我們把方体

$$-\lambda \leqslant t_i \leqslant \lambda,\quad i=1,\cdots,n,\quad 0\leqslant \lambda \leqslant 1$$

的边界記作 $\dot{I}^n_\lambda$，并且定义 $f'_t(x)=f_t((1+t)x)$，$x\in \dot{I}^n_\lambda$，$0\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}$，

$$f'_t(x)=f_{2t}\left(\frac{\lambda+t(1-\lambda)}{\lambda}x\right),\quad x\in \dot{I}^n_\lambda,\quad \tfrac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1.$$

上面那个同态的意图在于展开"半方体" $-\frac{1}{2}\leqslant t_i\leqslant\frac{1}{2}$, $i=1,\cdots,n$ 来复蓋 I^n，同时得出同伦 f_t，并且把 I^n 的其余部分收缩到 $\dot{I}^n$ 上，同时"漸变"同伦 f_t 以致 f'_t 在 $\dot{I}^n$ 的各点上保持不动. 事实上，我們看到

$$f'_0=f_0,\quad f'_t(\dot{I}^n)=f'_t(\dot{I}^n_1)=f_0(\dot{I}^n),$$

$$f'_1(\dot{I}^n_\lambda)=y_0,\quad 0\leqslant\lambda\leqslant\tfrac{1}{2},\quad f'_1(\dot{I}^n_\lambda)\subset Y_0,\quad \tfrac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1.$$

于是 f'_1 也代表 α 而 $\alpha\in i\pi_n(Y_0)$.

(2a)的証明. 設 $\alpha\in\pi_n(Y)$ 由

$$f: I^n, \dot{I}^n \to Y, y_0$$

代表. 于是 $dj\alpha$ 由

$$f|I^{n-1}: I^{n-1},\quad \dot{I}^{n-1}\to Y_0, y_0$$

代表；但是 $f(I^{n-1})=y_0$，所以 $dj\alpha=0$.

(2b)的証明. 設 $\alpha\in d^{-1}(0)$. 于是 α 由

$$f: I^n, I^{n-1}, J^{n-1}\to Y, Y_0, y_0$$

代表，它使得 $f|I^{n-1}$ 同伦于 y_0, rel $\dot{I}^{n-1}$. 这一个同伦服从一个映象 $F': I^n\times 0\cup \dot{I}^n\times I\to Y$ $(F'(x,t)=y_0,\ x\in J^{n-1})$，它可以扩张成

$$F: I^n\times I, I^{n-1}_*\times I, J^{n-1}\times I\to Y, Y_0, y_0.$$

这样，f 就和一个把 $\dot{I}^n$ 映成 y_0 的映象归在同一个同伦类，因此 $\alpha\in j\pi_n(Y)$.

(3a)和(3b)的証明可以从下面的引理得出：

引理 2.2. 一个映象 $f: S^n, p_0\to Y, y_0$ 是零伦的，当而且只当它有一个擴張 $f': E^{n+1}\to Y$.

---

1) 这一个証明，用方体上的映象重新說明了第三章的引理 3.6. 我們把 n 維方体的中心取在 $(0,\cdots,0)$，这常常是很便利的.

首先設 f 有这样一个扩张并且設 θ_t 把 E^{n+1} 收縮成 p_0. 于是 $f\theta_t|S^n$ 是 f 的所需要的同伦. 注意它是一个同伦 rel p_0.

現在假定存在 $f_t:S^n \to Y$ 且 $f_1 = f$, $f_0(S^n) = y_0$. E^{n+1} 中的点可以表示成 λx, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $x \in S^n$; 定义 $f'(\lambda x) = f_\lambda(x)$.

(3a)的証明. 設 $\alpha \in \pi_{n+1}(Y, Y_0)$ 由

$$f: E^{n+1}, S^n, p_0 \to Y, Y_0, y_0$$

代表 (对于这一个証明, 采用 E^{n+1} 上的映象比用 I^{n+1} 上的映象更为方便). 于是 $id\alpha$ 由一个映象 $f|S^n: S^n, p_0 \to Y, y_0$ 代表, 它有一个对于 E^{n+1} 的扩张. 这样就有 $id\alpha = 0$.

(3b)的証明. 設 $\alpha \in i^{-1}(0)$ 由 $f: S^n \to Y_0$ 代表, 并且假定 f 在 Y 中是零伦的. 于是 f 有一个扩张 $f': E^{n+1}, S^n \to Y, Y_0$, 从而 $\alpha \in d\pi_{n+1}(Y, Y_0)$.

3. 同伦序列的性質. 設 K 是一个(有限)单純复合形, L 是它的一个閉子复合形, 而 σ^0 是 L 的一个頂点. 于是可以定义一个同調序列[1], 即

$$\cdots \to H_{n+1}(K, L) \xrightarrow{d'_{n+1}} H_n(L) \xrightarrow{i'_n} H_n(K) \xrightarrow{j'_n} H_n(K, L) \to \cdots.$$

事实上, i'_n 是由把 K 上的閉鏈当作一个相对閉鏈 mod L 导出, 而 d'_{n+1} 是由取一个相对閉鏈 mod L 的边界导出; 这一个边界自然是 L 的一个閉鏈. 我們留給讀者自己去驗証, 在前面所說的步驟下相应的同态可以导出, 并且去証明下面的定理, 它比与它相应的同伦序列的正合性的定理(定理 2.1)更要初等些.

定理 3.1. 同調序列是正合的.

在第三章內我們描述过几个标准的同态, 我們現在把它們叫作 λ_n, μ_n, ν_n

$$\lambda_n: \pi_n(|K|, \sigma^0) \to H_n(K), \quad \mu_n: \pi_n(|L|, \sigma^0) \to H_n(L),$$
$$\nu_n: \pi_n(|K|, |L|, \sigma^0) \to H_n(|K|, |L|).$$

現在的事情只在于由定义直接驗証这些交换关系

---

1) 尽管定理 3.1 和同态 λ_n, μ_n, ν_n 的一个推广对于一般的系数成立, 这里, 如同在第三章內, 只限于整数系数.

$$i'_n\mu_n = \lambda_n i_n, \quad j'_n\lambda_n = \nu_n j_n, \quad d'_n\nu_n = \mu_{n-1}d_n, \qquad (3.2)^{1)}$$

在同伦序列的同态和同調序列的同态間成立．我們設(λ, μ, ν)是同伦序列到同調序列内的一个同态．它叫作自然同态，并且同态λ_n, μ_n, ν_n也叫作自然的．我們附带声明一下，如果引用連續同調論，定理 3.1 和(3.2)可以推广到一般的弧式連通的豪斯道夫空間．

我們現在給出序列間的同态的第二个例子．設f是一个映Y, Y_0, y_0入Z, Z_0, z_0的映象．略去基点，这时f导出同态

$$f_n^0:\pi_n(Y)\to\pi_n(Z), \quad f_n^*:\pi_n(Y_0)\to\pi_n(Z_0),$$

$$\bar{f}_n:\pi_n(Y, Y_0)\to\pi_n(Z, Z_0).$$

然后容易驗証交換关系

$$i_n f_n^0 = f_n^* i_n, \quad j_n f_n^* = \bar{f}_n j_n, \quad d_n\bar{f}_n = f_{n-1}^0 d_n \qquad (3.3)$$

在偶(Y, Y_0)和(Z, Z_0)的同伦序列的同态間成立，这两組同态在(3.3)内都写作i, j, d．进一步，我們还可以証明

定理 3.4. (Y, Y_0)的同态序列到(Z, Z_0)的同态序列内的同态$(f^*, f^0, \bar{f})$是一个運算同态，即对于所有$\xi\in\pi_1(Y_0)$，$\alpha\in\pi_n(Y_0)$，$\beta\in\pi_n(Y)$，$\gamma\in\pi_n(Y, Y_0)$，有

$$\text{(i)}\ f_n^0(\xi\alpha) = f_1^0(\xi)(f_n^0(\alpha)), \quad \text{(ii)}\ f_n^*(\xi\beta) = f_1^0(\xi)(f_n^*(\beta)),$$

$$\text{(iii)}\ \bar{f}_n(\xi\gamma) = f_1^0(\xi)(\bar{f}_n(\gamma)).$$

(i) 的証明． 設$\alpha\in\pi_n(Y, y_0)$由$g: I^n, \dot{I}^n\to Y_0, y_0$代表，并且設$G: I^n\times I\to Y_0$是$g$的一个同伦，在这一同伦下，$\dot{I}^n$的象点描出同伦类$\xi^{-1}$中的一条迴綫．于是

$$fG: I^n\times I\to Z_0$$

是一个同伦，在这一同伦下，$\dot{I}^n$的象点描出同伦类$f_1^0(\xi^{-1}) = (f_1^0(\xi))^{-1}$中的一条迴綫．这时如果$g': I^n, \dot{I}^n\to Y_0, y_0$由$g'(x) = G(x, 1)$，$x\in I^n$給定，則$g'$代表$\xi\alpha$而$fg'$代表$f_1^0(\xi)(f_n^0(\alpha))$．因此有$f_n^0(\xi\alpha) = f_1^0(\xi)(f_n^0(\alpha))$．至于(i)和(iii)的証明与它类似．

如果$f_n^*, f_n^0, \bar{f}_n$对于所有的n都是同构，我們就說$(f^*, f^0, \bar{f})$是一个同构．如果(Y, Y_0)和(Z, Z_0)具有相同的同伦型，显然

---

1) 这里公式的編号按原书編排，即定理、引理、系、公式的編号是混在一起編排的——編者注．

(Y, Y_0) 和 (Z, Z_0) 的同伦序列是同构的. 尽管如此，由上面的事实并不一定就有：同伦序列間的同构可以几何地实現为某一映象 $f: Y, Y_0 \to Z, Z_0$ 所导出的同构. 对于一些"良好"的空間[1]，一个导出同伦序列間同构的映象 f 可以証明是一个同伦等价.

4. 羣 $\pi_2(Y, Y_0)$. 在本节內我們研究同伦序列的"尾部"，它提供了一个有趣的代数情形. 这一节的一些結果，只除了在考虑定理 5.1 的一个特殊情形时，此后都不需要，而且即使对于这一情形，也可以参考系 4.2 而予以避免.

考虑序列

$$\cdots \to \pi_2(Y) \xrightarrow{j} \pi_2(Y, Y_0) \xrightarrow{d} \pi_1(Y_0) \xrightarrow{i} \pi_1(Y, Y_0) \to 0.$$

定理 4.1. $\pi_2(Y, Y_0)$ 是一个交錯的 $(\pi_1(Y_0), d)$-模. 这也就是說，它容許 $\pi_1(Y_0)$ 作为一个運算羣，并且有一个同态 $d: \pi_2(Y, Y_0) \to \pi_1(Y_0)$，使得

(i) $d(\xi\alpha) = \xi(d\alpha)\xi^{-1}$,

(ii) $(d\alpha)(\beta) = \alpha + \beta - \alpha$, $\alpha, \beta \in \pi_2(Y, Y_0)$, $\xi \in \pi_1(Y_0)$.

(i) 的証明[2]. 設 $f \in M_2(Y, Y_0, y_0)$ 代表 α，并且設

$$F: I^2 \times I, I^1 \times I \to Y, Y_0$$

是 f 的一个同伦，在这一同伦下，J^1 的象点描出 ξ^{-1} 中的一条迴綫. 由于 $F|I^1 \times I$ 是一个映整个方形入 Y_0 的映象，映象 $F|(I^1 \times \times I)$ 代表着 Y_0 的基本羣內的零元素. 同样

$$f'(t_1) = F(t_1, 1), \quad t_1 \in I^1$$

所給定的映象 $f': I^1, \dot{I}^1 \to Y_0, y_0$ 代表 $d(\xi\alpha)$. 从 $(0, 1)$ 起始，依反时針方向繞方形 $I^1 \times I$ 进行，我們得到 $\xi \cdot d\alpha \cdot \xi^{-1}(d(\xi\alpha))^{-1} = 1$ 或

$$d(\xi\alpha) = \xi d\alpha \xi^{-1}$$

(ii) 的証明. 为更方便起見，用适合于 $f(E_2^2) = g(E_1^2) = y_0$

1) 例如，对于有限单純复合形，以至第七章內更一般的复合形.

2) 在第二章內我們提到过，如果 $\xi, \eta \in \pi_1(Y_0)$，則 $\xi(\eta) = \xi\eta\xi^{-1}$. 由于 d 是一个运算同态，$d(\xi\alpha) = \xi(d\alpha)$，因此(i)正是 $\xi(\eta) = \xi\eta\xi^{-1}$ 的一个特殊情形. 这一个一般的結果可以如同(i)那样来証明.

的映象 $f, g: E^2, S^1, p_0 \to Y, Y_0, y_0$ 来代表 α, β. 这时 $\alpha+\beta$ 就由一个在 E_1^2 上与 f, 在 E_2^2 上与 g 相合的映象 h 来代表. 設 ρ_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ 是 E^2 的一个依反时針方向轉过了一个角度 π_t 的旋轉. 設 f_t, g_t, h_t 各自为 $f\rho_t, g\rho_t, h\rho_t$. 在 ρ_t 下,这时 p_0 描出 E_+^1 (S^1 的北半球). 因此 g_t 是一个同伦 $g_t: E^2, S^1, p_0 \to Y, Y_0, y_0$, 而 g_1 就代表 β. 另一方面 p_0 在 f_t 和 h_t 下的象是 Y_0 中的一条代表 $d\alpha$ 的迴綫. 因而 f_1 代表 $(d\alpha)^{-1}(\alpha)$, 而 h_1 代表 $(d\alpha)^{-1}(\alpha+\beta)$. 現在 ρ_1 把 E_1^2 和 E_2^2 互相交換, 所以 $f_1(E_1^2) = g_1(E_2^2) = y_0$, 而 h_1 在 E_1^2 上与 g_1、在 E_2^2 上与 f_1 相合. 这样 h_1 就代表 $\beta + (d\alpha)^{-1}(\alpha)$, 从而

$$(d\alpha)^{-1}(\alpha+\beta) = \beta + (d\alpha)^{-1}(\alpha),$$

或

$$\alpha+\beta-\alpha = (d\alpha)(\beta).$$

这就証明了(ii). 注意,事实上 $(d\alpha)^{-1}(\alpha) = \alpha$.

系 4.2. $j\pi_2(Y)$ 包含在 $\pi_2(Y, Y_0)$ 的中心.

設 $\alpha \in j\pi_2(Y)$, $\beta \in \pi_2(Y, Y_0)$. 这时,据定理 2.1, $d\alpha = 1$. 因而,据定理 4.1 的 (ii), $\alpha+\beta-\alpha = \beta$ 或 $\alpha+\beta = \beta+\alpha$.

系 4.3. $i\pi_1(Y_0)$ 是作用在 $j\pi_2(Y)$ 上的一个運算羣.

設 $\alpha \in j\pi_2(Y)$, $\xi \in \pi_1(Y_0)$. 据定理 4.1 的(i), $d(\xi\alpha) = \xi 1 \xi^{-1} = 1$, 因此 $\xi\alpha \in j\pi_2(Y)$. 如果 $\xi = d\beta$, $\beta \in \pi_2(Y, Y_0)$, 由于 α 是在 $\pi_2(Y, Y_0)$ 的中心內, 則 $\xi\alpha = \beta+\alpha-\beta = \alpha$. 这样 $d\pi_2(Y, Y_0)$ 平凡地作用在 $j\pi_2(Y)$ 上. 于是羣 $\pi_1(Y_0)/d\pi_2(Y, Y_0)$ 作用在 $j\pi_2(Y)$ 上. 但是, 据同伦序列的正合性, i 导出一个同构 $\pi_1(Y_0)/d\pi_2(Y, Y_0) \approx i\pi_1(Y_0)$. 这就証明了系.

如果 Y 是一个 2 維(連通)单純复合形,并且 Y_0 是它的 1 維截綫,这时可以証明

$$i\pi_1(Y_0) = \pi_1(Y) \quad 和 \quad \pi_2(Y_0) = 0,$$

因此 j 是一个同构. 系 4.3 中所描述的运算这时就与 $\pi_1(Y)$ 在 $\pi_2(Y)$ 上通常的运算重合. 交錯模的理論已經在 J. H. C. 威脫海特, Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949), 453—496 頁中有过研究, 其中, 他証明了在这一个特殊情形下 $\pi_2(Y, Y_0)$ 在某种意义上是

一个"自由"交錯模[1].

5. 几个特殊情形.

定理 5.1. 如果 Y_0 在 Y 中可以变形到 y_0, rel y_0, 則

$$\pi_2(Y, Y_0) \approx \pi_n(Y) + \pi_{n-1}(Y_0), \quad n \geqslant 2.$$

設 $h: Y_0 \times I \to Y$ 是一个映象使得

$$h(p, 0) = p, \quad p \in Y_0, \quad h(y_0, t) = h(p, 1) = y_0,$$
$$p \in y_0, \quad t \in I.$$

給定 $f: I^{n-1}, \dot{I}^{n-1} \to Y_0, y_0$, 定义 $f': I^n, I^{n-1}, J^{n-1} \to Y, Y_0, y_0$ 为 $f'(t_1, \cdots, t_n) = h(f(t_1, \cdots, t_{n-1}), tn)$. 于是 $f \sim f'$ 显然导出一个同态 $\mu: \pi_{n-1}(Y_0) \to \pi_n(Y, Y_0)$. 考虑序列

$$\pi_{n+1}(Y, Y_0) \xrightarrow{d_{n+1}} \pi_n(Y_0) \xrightarrow{i} \pi_n(Y) \xrightarrow{j} \pi_n(Y, Y_0) \xrightarrow{d_n} \pi_{n-1}(Y_0).$$

于是[2] $d\mu = 1$, 如果 $n > 2$, 则有

$$\pi_n(Y, Y_0) = d^{-1}(0) + \mu\pi_{n-1}(Y_0) = j\pi_n(Y) + \mu\pi_{n-1}(Y_0).$$

現在 μ 是一个同构. 同样, d_{n+1} 是到 $\pi_2(Y_0)$ 上的同态, 因此据正合性, i 就映射到 0 而 j 是一个同构. 如果 $n = 2$, 这就有: $\pi_2(Y, Y_0)$中的任意一个元素可以唯一地表示为

$$x + y, \quad x \in j\pi_n(Y), \quad y \in \mu\pi_{n-1}(Y_0),$$

并且 j 和 μ 是同构. 上面的 x 和 y 的交换性可以从这样一个事实得出, 即 $j\pi_2(Y)$ 是在 $\pi_2(Y, Y_0)$ 的中心內. (这个定理应用于当 Y 是一个球而 Y_0 是它的眞閉子集时).

定理 5.2. 如果 Y_0 是 Y 的一个收縮核, 則

$$\pi_n(Y) \approx \pi_n(Y_0) + \pi_n(Y, Y_0), \quad n \geqslant 2.$$

設 $k: Y \to Y_0$ 是这一个保核收縮, 因此 $k|Y_0 = 1$. 于是, 如果 i 是一个恆等映象 $Y_0 \to Y$, $ki = 1$, 因此 $k^*i = 1$, 其中

$$k^*: \pi_n(Y) \to \pi_n(Y_0)$$

是由 k 导出的, 而 i 是由 i 导出的內射变換 $\pi_n(Y_0) \to \pi_n(Y)$. 这

---

1) 更进一步的一些結果已經由 W. H. Cockcroft (Quart. J. Math., 2 (1951), 123—134, 159—160) 和 Anne Cobbe (ibid. pp. 269—285) 給出.

2) 这里以及后面, 当不致引起誤会时, 我們就略去同态 i, j, d 中的維数下标.

就有 $\pi_n(Y)=i\pi_n(Y_0)+k^{*^{-1}}(0)$, $n\geqslant 2$, 而 i 是同构, $n\geqslant 1$. 回到同伦序列, 我們看出 d_{n+1} 是到 0 上的, $n\geqslant 1$, 因此 j_* 是到 $\pi_n(Y, Y_0)$ 上的. 由于 j 的核是 $i\pi_n(Y_0)$, $j|k^{*^{-1}}(0)$ 就是 $k^{*^{-1}}(0)$ 到 $\pi_n(Y, Y_0)$ 上的一个同构,所以

$$\pi_n(Y)\approx\pi_n(Y_0)+\pi_n(Y, Y_0),\quad n\geqslant 2.$$

定理 5.3. 如果 Y 可以变形到 Y_0 内, rel y_0, 則

$$\pi_n(Y_0)\approx\pi_n(Y)+\pi_{n+1}(Y, Y_0),\quad n\geqslant 2.$$

設 $h_t: Y, y_0\rightarrow Y, y_0$ 是这一个形变, 設 $f: Y, y_0\rightarrow Y_0, y_0$ 由 $f(p)=h_1(p)(p\in Y)$ 給定,并且設 f 导出 $f^*:\pi_n(Y)\rightarrow\pi_n(Y_0)$. 于是 $if\sim 1: Y, y_0\rightarrow Y, y_0$, 从而 $if^*=1:\pi_n(Y, Y_0)\approx\pi_n(Y, y_0)$. 这就得 $\pi_n(Y_0)=f^*\pi_n(Y)+i^{-1}(0)$, $n\geqslant 2$, f^* 是同构而 i 是到 $\pi_n(Y)$ 上的, $n\geqslant 1$. 回到同伦序列, 由于 i 是在上的, j 就映射到 0 上, 因而 d 是一个同构, 所以

$$\pi_n(Y_0)=f^*\pi_n(Y)+d\pi_{n+1}(Y, Y_0),$$

并且 f^* 和 d 是同构[1].

不仅是定理 5.1, 5.2 和 5.3, 而且还有这种把子羣作为直接和而包含在相应的羣中的謹严方法都是很重要的. 同时我們要注意到, 看作是定理 5.2 的一个推論, 如果 Y_0 是 Y 的一个收縮核, 則 $\pi_2(Y, Y_0)$ 是交换的.

6. 两个空間的幷集的同伦羣. 設 Y, Y' 是两个弧式連通的豪斯道夫空間, 它們有唯一的一个公共点 y_0, 并且設 $Y\cup Y'$ 是由它們的幷集作成的空間[2]. 我們把 $Y\cup Y'$ 和 $Y\times Y'$ 的子集 $Y\times y_0'\cup y^0\times Y'$ 恆同地看待, 这里 (y_0', y_0') 是 $Y\times y_0'$, $y_0\times Y'$ 的公共点.

定理 6.1. $\pi_n(Y\times Y')\approx\pi_n(Y)+\pi_n(Y')$.

定理 6.2. $\pi_n(Y\cup Y')\approx\pi_n(Y)+\pi_n(Y')+\pi_{n+1}(Y\times Y', Y\cup Y')$, $n\geqslant 2$.

---

1) 讀者应該注意到定理 5.1 和 5.3 的証明方法是类似的.

2) 这也就是說, Y 和 Y' 看作是 $Y\cup Y'$ 中的閉子集而保持着它們的拓扑結构.

(在 Seifert 和 Threlfall 合著的 Lehrbuch der Topologie[1] 一书中，証明了 $\pi_1(Y \cup Y')$ 是 $\pi_1(Y)$ 和 $\pi_1(Y')$ 的自由积。)

設 $m: Y \times Y' \to Y$ 是由 $m(y, y')$ 所定义的投射，并且設 $i: Y \to Y \times Y'$ 是恆等映象 $i(y) = (y, y'_0)$。类似地，定义 m', i'，并且設 m, m', i, i' 导出

$$\mu: \pi_n(Y \times Y') \to \pi_n(Y), \quad \mu': \pi_n(Y \times Y') \to \pi_n(Y'),$$
$$i: \pi_n(Y) \to \pi_n(Y \times Y'), \quad i': \pi_n(Y') \to \pi_n(Y \times Y').$$

于是显然有 $\mu i = \mu' i' = 1$，$\mu i' = \mu' i = 0$ ("零"同态)。

設 $\eta: \pi_n(Y \times Y') \to \pi_n(Y) + \pi_n(Y')$ 是由

$$\eta(\alpha) = \mu(\alpha) + \mu'(\alpha)$$

所給定的同态。我們証明 η 是一个同构。由于 $\mu_i = 1$，$\mu' i' = 1$ 和 $\mu_{i'} = \mu'_i = 0$，这就有

$$\eta(i\beta + i'\beta) = \beta + \beta', \quad \beta \in \pi_n(Y), \quad \beta' \in \pi_n(Y').$$

于是 η 是在上的。現在設 $\eta(\alpha) = 0$，并且設 $f: I^n, \dot{I}^n \to Y \times Y'$，$(y_0, y'_0)$ 代表 α。設 $f(x) = (g(x), g'(x))$，$x \in I^n$，因此 $g: I^n, \dot{I}^n \to Y, y_0$ 代表 $\mu(\alpha)$；$g' I^n, \dot{I}^n \to Y', y_0$ 代表 $\mu'(\alpha)$。由于 $\mu(\alpha) = \mu'(\alpha) = 0$，就存在同伦

$$g_t: I^n, \dot{I}^n \to Y, y_0, \quad g'_t: I^n, \dot{I}^n \to Y', y'_0$$

且 $g_0 = g$，$g_1(I^n) = y_0$；$g'_0 = g'$，$g'_1(I^n) = y'_0$。同伦

$$f_t(x) = (g_t(x), g'_t(x))$$

这时就把 f 变形为常值映象，而定理 6.1 得以証明。

設 $\bar{i}: \pi_n(Y) \to \pi_n(Y \cup Y')$，$\bar{i}': \pi_n(Y') \to \pi_n(Y \cup Y')$，

$$i^*: \pi_n(Y \cup Y') \to \pi_n(Y \times Y')$$

是內射变换，并且定义

$$\theta: \pi_n(Y) + \pi_n(Y') \to \pi_n(Y \times Y'),$$
$$\bar{\eta}: \pi_n(Y \times Y') \to \pi_n(Y \cup Y')$$

为 $\theta(\beta + \beta') = i\beta + i'\beta'$，$\bar{\eta}(\alpha) = \bar{i}\mu(\alpha) + \bar{i}\mu'(\alpha)$，$\beta \in \pi_n(Y)$，$\beta' \in \pi_n(Y')$，$\alpha \in \pi_n(Y \times Y')$。于是 $\eta\theta(\beta + \beta') = \eta(i\beta + i'\beta') =$

---

1) 有江澤涵教授譯的汉譯本——譯者注。

$=\beta+\beta'$，因此 $\eta\theta=1$，但是 η 是一个同构，所以 $\theta\eta=1$. 这就得到 $i^*\bar{\eta}(\alpha)=i^*(\bar{i}\mu(\alpha)+\bar{i}'\mu'(\alpha))=i\mu(\alpha)+i'\mu'(\alpha)=\theta\eta(\alpha)=$ $=\alpha$. 于是 $\bar{\eta}$ 是 i^* 的一个右逆变换. 此外，$\bar{\eta}i\beta=\bar{i}\mu i\beta+\bar{i}'\mu' i\beta=$ $=\bar{i}\beta$，所以 $\bar{\eta}i=\bar{i}$，$\bar{\eta}i'=\bar{i}'$，并且

$$\bar{\eta}\pi_n(Y\times Y')=\bar{\eta}i\pi_n(Y)+\bar{\eta}i'\pi_n(Y')=\bar{i}\pi_n(Y)+\bar{i}'\pi_n(Y'),$$

从而

$$\pi_n(Y\cup Y')=\bar{\eta}\pi_n(Y\times Y')+i^{*-1}(0)=$$
$$=\bar{i}\pi_n(Y)+\bar{i}'\pi_n(Y')+i^{*-1}(0).$$

由于 $Y\cup Y'$ 可以內射到 Y 或 Y' 上，$\bar{i}$ 和 $\bar{i}'$ 显然是单价的.

考虑对 $Y\times Y'$，$Y\cup Y'$ 的同伦序列

$$\cdots\to\pi_{n+1}(Y\times Y',Y\cup Y')\xrightarrow{d}\pi_n(Y\cup Y')$$
$$\xrightarrow{i^*}\pi_n(Y\times Y')\xrightarrow{j}\pi_n(Y\times Y',Y\cup Y')$$
$$\xrightarrow{d_n}\pi_{n-1}(Y\cup Y')\to\cdots.$$

于是 $i^{*-1}(0)=d\pi_{n+1}(Y\times Y',Y\cup Y')$. 由于 i^* 是在上的[1]，$n\geqslant 2$，j 就映射到 0，$n\geqslant 2$，所以 d_n 是同构，$n\geqslant 2$. 这样就有

$$\pi_n(Y\cup Y')=\bar{i}\pi_n(Y)+\bar{i}'\pi_n(Y')+$$
$$+d\pi_{n+1}(Y\times Y',Y\cup Y'),\quad n\geqslant 2,$$

其中 $\bar{i}$，$\bar{i}'$，d 是同构. 应該注意 $\pi_n(Y\cup Y')$ 經 $\bar{\mu}$，$\bar{\mu}'$ 而內射到它的被加項 $\pi_n(Y)$，$\pi_n(Y')$ 上. 同时可以看出 $d\pi_2(Y\times Y',Y\cup Y')$ 是 $\pi_1(Y\cup Y')$ 的換位子羣 $[\pi_1(Y),\pi_1(Y')]$.

7. 一个三数組的同伦序列. 設 A 是一个弧式連通的空間，而 B 和 C 是它的弧式連通的閉子空間使得 $C\subset B\subset A$. 于是我們有同伦序列

$$\cdots\to\pi_{n+1}(A,B)\xrightarrow{d^*_{n+1}}\pi_n(B,C)\xrightarrow{i^*_n}\pi_n(A,C)$$
$$\xrightarrow{j^*_n}\pi_n(A,B)\xrightarrow{d^*_n}\cdots,$$

1) 讀者已經观察到，在基于正合序列的証明里常常含有这样的术語，例如："i_n 是到 $\pi_n(Y)$ 上的". 依从布巴齐(Bourbaki)(以及其他一些人)，当清楚的了解羣时，我們簡单地說作 "i_n 是在上的".

其中 i_n^*，j_n^* 是由恆等映象

$$B, C \to A, C, \quad A, C \to A, B$$

导出的內射变换，而 d_{n+1}^* 是 $d_{n+1}: \pi_{n+1}(A, B) \to \pi_n(B)$ 繼以 $\pi_n(B) \to \pi_n(B, C)$ 組成的变换．这一个序列叫作三数組(A, B, C)的同伦序列．如果C是同伦羣的基点，它就还原为对(A, B)的同伦序列．

定理 7.1. 三数組(A, B, C)的同伦序列是正合的．

它可以从定理 2.1 和某些初等的事实得出．我們只打算描述

$$i_n^{*-1}(0) = d_{n+1}^* \pi_{n+1}(A, B)$$

的証明．考虑下面的图解

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_n(C) & = & \pi_n(C) \\
 & & \downarrow i_n' & & \downarrow i_n'' \\
\pi_{n+1}(A, B) & \xrightarrow{d_{n+1}} & \pi_n(B) & \xrightarrow{i_n} & \pi_n(A) \\
 & & \downarrow j_n' & & \downarrow j_n'' \\
 & & \pi_n(B, C) & \xrightarrow{i_n^*} & \pi_n(A, C) \\
 & & \downarrow d_n' & & \downarrow d_n'' \\
 & & \pi_{n-1}(C) & = & \pi_{n-1}(C)
\end{array}$$

这里 d_{n+1}，i_n 是对(A, B)的序列的同态；i_n'，j_n'，d_n' 是对(B, C)的同伦序列中的同态；而 i_n''，j_n''，d_n'' 是对(A, C)的同伦序列中的同态．据定义我們有 $d_{n+1}^* = j' d_{n+1}$，另外，下面的“交換性”关系显然成立：

$$i_n i_n' = i_n''; \quad i_n^* j_n' = j_n'' i_n; \quad d_n'' i_n^* = d_n'.$$

现在設 $\alpha \in \pi_{n+1}(A, B)$．因为 $i_n d_{n+1} = 0$，所以

$$i_n^* d_{n+1}^* \alpha = i_n^* j_n' d_{n+1} \alpha = j_n'' i_n d_{n+1} \alpha = 0.$$

这样，$d_{n+1}^* \pi_{n+1}(A, B) \subset i_n^{*-1}(0)$．其次，設 $\alpha \in \pi_n(B, C)$，并且設 $i_n^* \alpha = 0$．于是 $d_n' \alpha = d_n'' i_n^* \alpha = 0$，据正合性，$\alpha = j_n' \beta$，$\beta \in \pi_n(B)$．于是 $0 = i_n^* \alpha = i_n^* j_n' \beta = j_n'' i_n \beta$，据正合性，$i_n \beta = i_n'' \gamma$，$\gamma \in \pi_n(C)$．这样

$$i_n(\beta - i_n' \gamma) = i_n \beta - i_n'' \gamma = 0,$$

据正合性，$\beta - i_n' \gamma = d_{n+1} \delta$，$\delta \in \pi_{n+1}(A, B)$，并且由于 $j_n' i_n' = 0$，

就有

$$\alpha = j'_n\beta = j'_n(\beta - i'_n\gamma) = j'_n d_{n+1}\delta = d^*_{n+1}\delta.$$

这样就説明着 $i_n^{*-1}(0) \subset d^*_{n+1}\pi_{n+1}(A, B)$，从而完成了 $i_n^{*-1}(0) = d^*_{n+1}\pi_{n+1}(A, B)$ 的証明．定理的其它部分可以类似地証明．

对于三数組同伦羣的定义、性质和应用，可以参看 A. L. Blakers and W. S. Massey, "The homotopy groups of a triad, I", *Ann. Math.*, 53 (1951), 161—205.

第五章　纖 維 空 間

1. 定义和基本定理. 設 $\phi: X \to Y$ 是一个映 X 到 Y 上的映象且具有下面的性質:

(i) 每一个原象集 $\phi^{-1}(y)$, $y \in Y$ 都同胚于某一个空間 A.

(ii) 存在 Y 的一个开复蓋 $\{U\}$, 其中的每一个 U 对应一个拓扑映象 $\psi: U \times A \to \phi^{-1}(U)$, 且当 $y \in U$, $a \in A$ 时有 $\psi(y, a) \in \phi^{-1}(y)$.

这时我們就說 X 是一个纖維空間[1], 以 Y 为底空間, A 为纖維, $\phi: X \to Y$ 为投射(或纖維映象).

例. (i) $X = Y \times A$. 这时 $\phi(y, a) = y$, $y \in Y$, $a \in A$, Y 的开集的任一个基 $\{U\}$ 可以看作是开复蓋, 而 ψ 是恆等映象.

(ii) X 是 Y 的一个复蓋空間. 这时 A 是一个离散点集, ϕ 是复蓋映象 $X \to Y$, $\{U\}$ 是实現 X 与 Y 間局部同胚的邻域的一个基. X 中所有在 Y 的一个已給点上的点通过 A"标出", 且假如 $(y, a) \in U(y_0) \times A$, 則 $\psi(y, a)$ 是 y 在 $U(y_0)$ 和 X 中的在 y_0 上且指标为 a 的点的邻域間的拓扑变换下的象.

(iii) X 是一个麦比亚士(Möbius)带, Y 是一个圓周, A 是一条綫段(图 1).

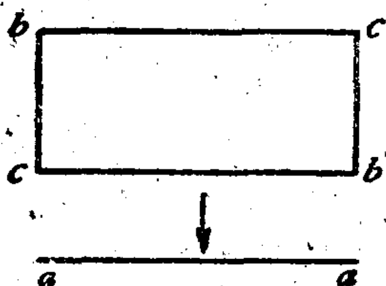


图 1

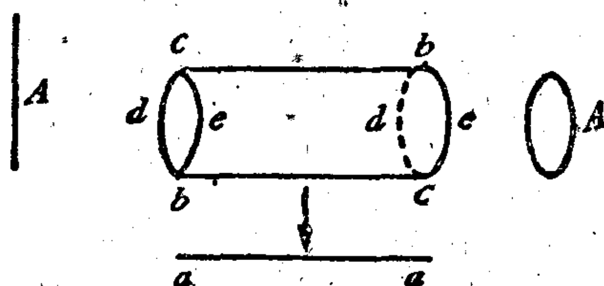


图 2

1) 关于定义一个纖維丛所需要的附加的构造可以参看史締路德 (Steenrod) 所著 *Topology of Fibre Bundles*, Princeton. 在这一章內我們将不涉及到纖維"丛".

(iv) X 是一个克林(Klein)瓶，Y 是一个圆周，A 是一个圆周(图 2)。

(v) 紧致李羣 X，作为一个流形 Y 上的传递羣．X 到 Y 上的投射由选好一个特殊的 $y_0 \in Y$ 并且定义 $\phi(x) = x(y_0)$ 所給出．原象集 $\phi^{-1}(y)$ 这时只是 X 中使得 y_0 不动的子羣的左陪集．这一情形中函数 ψ 的存在由薛华雷(Chevalley)所著的 *Theory of Lie Groups* (Princeton 数学丛书第 12 种)中 110 頁命題 1 給出[1]．

研究 X, Y 和 A 間的同伦关系是有趣的并且也是重要的．例如，纖維理論中的一个中心問題就是截面的存在性(或不存在性)，所謂截面即一个映象 $f: Y \to X$ 使得 $\phi f: Y \to Y$ 是恆等映象．我們将看到这一个問題由于研究 X, Y, A 的同伦关系而得到闡明．最近，X, Y 和 A 的同調关系已經有了一个研究，不过我們并不在这里討論它，只在 §4 內关于它的应用有一个指明．

纖維空間上的基本定理可以陈述为一个扩张定理．

定理 1.1． 設 K 是一个(有限)單純复合形，子复合形 $L \subset K$ 是 K 的一个形变收縮核．設 $f_0: L \to X$ 是一个映象，使得 $g_0 = \phi f_0: L \to Y$ 容許一个扩張 $g: K \to Y$．这时 f_0 可以扩張成 $f: K \to X$ 使得 $g = \phi f$．

自然，L 上的任何一个到 X (与 Y)的映象容許一个对于 K 的扩张．这一定理的作用在于：由一个扩张 f 我們可以"籠盖"已給的扩张 g．

为了証明这个定理，我們先处理下面的特別情形．我們取 $K = \sigma \times I$, $L = \sigma \times 0 \cup \dot{\sigma} \times I$，其中的 σ 是一个閉单純形[2]，并且假定单位区間可以分成 $0 = t_0, t_1, \cdots, t_n = 1$，使得对于每一个 $i = 0, 1, \cdots, n-1$, $g(\sigma \times \langle t_i, t_{i+1} \rangle)$ 包含于某一个开集 U_i 中．現在假定 f_0 已經扩张成

$$f_i: \sigma \times \langle 0, t_i \rangle \cup \dot{\sigma} \times I \to X,$$

---

1) 注意，我們可以代替 Y 为它的同胚象、商空間 X/X_0，其中 X_0 是使得 y_0 不动的子羣．

2) 如果 σ 是零維的，$\dot{\sigma}$ 是空的，而 $L = \sigma \times 0$．

且

$$\phi f_i = g|\sigma \times \langle 0, t_i\rangle \cup \dot{\sigma} \times I.$$

我們置 $\sigma_i = \sigma \times t_i$, $\tau_i = \dot{\sigma} \times \langle t_i, t_{i+1}\rangle$. 这时

$$\phi f_i(\sigma_i \cup \tau_i) = g(\sigma_i \cup \tau_i) \subset g(\sigma \times \langle t_i, t_{i+1}\rangle) \subset U_i.$$

于是 $f_i(\sigma_i \cup \tau_i) \subset \phi^{-1}(U_i)$. 現在存在一个拓扑映象 $\psi_i: U_i \times A \to \phi^{-1}(U_i)$. 我們定义映射 $h_i: \sigma_i \cup \tau_i \to U_i$, $k_i: \sigma_i \cup \tau_i \to A$ 为

$$f_i(p) = \psi_i(h_i(p), k_i(p)), \quad p \in \sigma_i \cup \tau_i.$$

現在 $\phi\psi_i(h_i(p), k_i(p)) = h_i(p)$. 这时 $h_i(p) = \phi f_i(p) = g(p)$, 所以 h_i 对于 $\sigma \times \langle t_i, t_{i+1}\rangle$ 的一个扩张由 $h_i'(q) = g(q)$, $q \in \sigma \times \langle t_i, t_{i+1}\rangle$ 給出. 設 θ 是 $\sigma \times \langle t_i, t_{i+1}\rangle$ 到 $\sigma_i \cup \tau_i$ 上的一个保核收縮. 于是 k_i 对于 $\sigma \times \langle t_i, t_{i+1}\rangle$ 的一个扩张由 $k_i'(q) = k_i\theta(q)$, $q \in \sigma \times \langle t_i, t_{i+1}\rangle$ 給出. 定义 $f_{i+1}(q) = \psi_i(g(q), k_i\theta(q))$, $q \in \sigma \times \langle t_i, t_{i+1}\rangle$, 我們就把 f_i 扩张为 $f_{i+1}: \sigma \times \langle 0, t_{i+1}\rangle \cup \dot{\sigma} \times I \to X$. 由作法, $\phi f_{i+1} = g|\sigma \times \langle 0, t_{i+1}\rangle \cup \dot{\sigma} \times I$. 重复上面的論証到所需的程度,最后我們作出所需的映象[1] f.

現在回到一般情形. 我們給定一个映象[2] $\rho: K \times I \to K$, 适合于 $\rho(p, 1) = p$, $\rho(q, t) = q$, $\rho(K \times 0) = L$, $p \in K$, $q \in L$, $t \in I$. 設

$$L^* = K \times 0 \cup L \times I, \quad K_r = K^r \cup L, \quad K_r^* = K \times 0 \cup K_r \times I$$

(因此 $L^* = K_{-1}^*$);并且定义

$$f_0^*: L^* \to X, \quad g_0^*: L^* \to Y, \quad g^*: K \times I \to Y$$

为 $f_0^* = f_0\rho$, $g_0^* = g_0\rho$, $g^* = g\rho$. 我們可以进一步假定 K 已經很好地剖分, 以至于它的每一个单純形 σ 具有在証明特殊情形时所需的性質. 然后可以假定 f_0^* 已經扩张成 $f_{r+1}^*: K_r^* \to X$ 且 $\phi f_{r+1}^* = g^*|K_r^*$ (注意 $g_0^* = \phi f_0^*$). 如果 $r < \dim K$, 我們对于每一个 $\sigma^{r+1} \times I$ 扩张 f_{r+1}^* (如同在特殊情形),使得 σ^{r+1} 的內部属于 $K - L$, 得到一个映象 $f_{r+2}^*: K_{r+1}^* \to X$. 継續依这一方法进行,直到我們得

---

1) 証明的精神仅在于利用这样的事实:在局部上, X 和 Y 与 A 的笛卡儿积有相同的拓扑性質.

2) 注意:为便利起見,我們反轉了收縮同伦 $K \to K$.

到一个映象 $f^*:K\times I\to X$，且 $\phi f^*=g^*$.

最后，我們定义 $f:K\to X$ 为 $f(p)=f^*(p,1)$, $p\in K$. 于是，如果 $q\in L$，則

$$f(q)=f^*(q,1)=f_0^*(q,1)=f_0\rho(q,1)=f_0(q),$$

并且

$$\phi f(p)=\phi f^*(p,1)=g^*(p,1)=g\rho(p,1)=g(p).$$

因此映象 $f:K\to X$ 滿足定理所要求.

作为这个定理的一个特殊情形，我們有：

定理 1.2（升騰同伦定理）. 設 $f_0:K\to X$ 是一个映象，映一个（有限）單純复合形 K 入 X，并且假設 $g_0=\phi f_0:K\to Y$ 容許同伦 $g_t:K\to Y$. 于是 f_0 容許同伦 $f_t:K\to X$ 使得 $\phi f_t=g_t$.

我們只需在定理 1.1 中替換 K 为 $K\times I$, L 为 $K\times 0$.

設 y_0 被选定为 Y 的同伦羣[1]的基点，設 A_0 是 y_0 上的纖維，并且設 $a_0\in A_0$ 被选作为 X 以及 X, A_0 的同伦羣的基点. 于是 ϕ 导出

$$\phi_r:\pi_r(X,A_0,a_0)\to\pi_r(Y,y_0).$$

定理 1.3. 对于所有的 r，ϕ_r 是一个在上的同构.

自然，ϕ_1 只能断定为集合 $\pi_1(X,A_0,a_0)$ 到集合 $\pi_1(Y,y_0)$ 上的一一映射.

首先，設 g 是一个映象 $E^r, S^{r-1}\to Y, y_0$，并且設 p_0 是 S^{r-1} 中的基点. 由 $f_0(p_0)=a_0$ 給出的映象 $f_0:p_0\to X$ 使得 $\phi f_0:p_0\to Y$ 有扩张 $g:E^r\to Y$. 由定理 1.1，f_0 有扩张 $f:E^r\to X$ 使得 $\phi f=g_0$. 由于 $gS^{r-1}=y_0$, $fS^{r-1}\subset A_0$，所以 f 是一个映象 $E^r, S^{r-1}, p_0\to X, A_0, a_0$，并且 ϕ_r 是到 $\pi_r(Y,y_0)$ 上的.

其次，設 $f':E^r, S^{r-1}, p_0\to X, A_0, a_0$ 使得

$$\phi f'\sim 0:E^r, S^{r-1}\to Y, y_0.$$

定义 $f_0:E^r\times 0\cup p_0\times I\to X$ 为

$$f_0(p,0)=f'(p),\ p\in E^r,\quad f_0(p_0,t)=a_0,\ t\in I.$$

映射 $\phi f_0:E^r\times 0\cup p_0\times I\to Y$ 容許扩张 $g:E^r\times I, S^{r-1}\times I\to Y, y_0$,

1) 如同以前那样，我們能够要求 Y 是弧式連通的（不然的話，我們可以代替它为 y_0 的弧式分支），但我們并不要求 X 和 A 是弧式連通的.

其中 g 是 $\phi f'$ 到常值映象的給定的同伦. 容易証明（代替 E^r 为 I^r，p_0 为 $(0, \cdots, 0)$）$E^r \times 0 \cup p_0 \times I$ 是 $E^r \times 1$ 的一个形变收縮核. 于是我們可以扩张 f_0 成 $f: E^r \times I \to X$ 使得 $\phi f = g$. 再者，由于 $g(S^{r-1} \times I) = y_0$，$f(S^{r-1} \times I) \subset A_0$，所以 f 是一个映象

$$E^r \times I, \ S^{r-1} \times I, \ p_0 \times I \to X, \ A_0, \ a_0.$$

現在 $g(E^r \times 1) = y_0$，所以 $f(E^r \times 1) \subset A_0$. 于是由 $f''(p) = f(p, 1)$，$p \in E^r$ 給出的映象 $f'': E^r \to X$ 代表 $\pi_r(X, A_0, a_0)$ 中的 0. 同样地对于 $f': E^r, S^{r-1}, p_0 \to X, A_0, a_0$，从而 ϕ_r 是同构而定理得以証明.

系 1.4. 如果 X 是以 A_0 为纖維的纖維空間，則 $\pi_2(X, A_0)$ 是可換的.

定理 1.3 的一个特別重要的特殊情形如下：

定理 1.5. 如果 $\widetilde{Y}$ 是 Y 的一个复盖空間，且如果 $\tilde{y}_0$ 是 y_0 上的任意一个点，則 ϕ 导出同构

$$\phi_r^*: \pi_r(\widetilde{Y}, \tilde{y}_0) \approx \pi_r(Y, y_0), \quad r \geqslant 2,$$

并且 ϕ_1^* 是 $\pi_1(\widetilde{Y}, \tilde{y}_0)$ 到 $\pi_1(Y, y_0)$ 內的一个同构.

因为在这一情形下纖維 A_0 是离散的. 于是，由于 S^{r-1} 是連通的，$r \geqslant 2$，任意的映象 $f: E^r, S^{r-1}, p_0 \to \widetilde{Y}, A_0, \tilde{y}_0$ 的确是一个映象 $f: E^r, S^{r-1} \to \widetilde{Y}, \tilde{y}_0$，并且任意的同伦

$$f_t: E^r, S^{r-1}, p_0 \to \widetilde{Y}, A_0, \tilde{y}_0$$

的确是一个同伦 $f_t: E^r, S^{r-1} \to \widetilde{Y}, \tilde{y}_0$. 再者，如果

$$f_t: E^1, S^0, p_0 \to \widetilde{Y}, A_0, \tilde{y}_0$$

是 $f_0: E^1, S^0 \to \widetilde{Y}, \tilde{y}_0$ 的一个同伦，由于任意一点在 f_t 下的路程是連通的，則又有 f_t 也是一个形式为 $f_t: E^1, S^0 \to \widetilde{Y}, \tilde{y}_0$ 的同伦. 因此，如果 j_r 是內射

$$\pi_r(\widetilde{Y}, \tilde{y}_0) \to \pi_r(\widetilde{Y}, A_0, \tilde{y}_0),$$

則 j_r 是一个同构（在上），$r \geqslant 2$；并且 j_1 单价地[1]映 $\pi_1(\widetilde{Y}, \tilde{y}_0)$ 入 $\pi_1(\widetilde{Y}, A_0, \tilde{y}_0)$. 由于 $\phi_r^* = \phi_r j_r$，定理就从定理 1.3（因为 ϕ_1^* 确为一个同态）得出.

---

1) 这就是說 j 是一一对应的；且应記住 $\pi_1(\widetilde{Y}, A_0, \tilde{y}_0)$ 没有羣的构造.

系 1.6. $\pi_r(S^1)=0,\ r\geqslant 2.$

因为圓周 S^1 有无限直綫作为万有复盖空間，并且直綫的所有同伦羣显然为零. 由直綫到圓周的映射仅仅是 $\phi(\alpha)=e^{i\alpha}$，α 是实数.

系 1.7. 如果 p^n 是 n 維实投影空間，則

$$\pi_1(p^n)=Z_2,\quad \pi_r(p^n)\approx\pi_r(S^n),\quad r\geqslant 2.$$

定理 1.3 可以相对地推广成以下定理:

定理 1.8. 如果 Y_0 是 Y 的一个包含 y_0 的閉子集，且如果 $X_0=\phi^{-1}(Y_0)$，則 ϕ 导出同构

$$\phi_r':\pi_r(X,X_0,a_0)\approx\pi_r(Y,Y_0,y_0).$$

如果我們把 X 特殊化: 作为 Y 的一个复盖空間 $\widetilde{Y}$，并且定义 $\widetilde{Y}_0=\phi^{-1}(Y_0)$，則我們看到复盖映象 ϕ 导出同构 $\phi_r':\pi_r(\widetilde{Y},\widetilde{Y}_0,\tilde{y}_0)\approx$ $\approx\pi_r(Y,Y_0,y_0)$. 如果 $r>1$，我們可以代替 $\widetilde{Y}_0$ 为包含 $\tilde{y}_0$ 的弧式連通的分支.

2. 霍卜夫纖維化. 我們将定义一个映象 $\phi:S^3\to S^2$，并且証明它是纖維空間 S^3 到底空間 S^2 上的一个投射且以 S^1 为纖維. 我們把 S^3 表作为合于 $z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2=1$ 的两个复变数 (z_1,z_2) 的空間，并且把 S^2 表作为射影直綫，它的点是不全为零的两个复数所成的复数偶的类，这里我們置 $[z_1,z_2]$ 和 $[z_1',z_2']$ 于同一类，如果存在一个复数 λ 使得 $z_1'=\lambda z_1$，$z_2'=\lambda z_2$. 我們然后定义 $\phi:S^3\to S^2$ 为 $\phi(z_1,z_2)=[z_1,z_2]$. 由于我們可以"正規化" $[z_1,z_2]$，通过除以 $(z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)^{\frac{1}{2}}$，这就有: ϕ 映射 S^3 到 S^2 上. 同时 (z_1,z_2) 与 (z_1',z_2') 在 ϕ 之下有同样的象，当而且只当有 λ 使得 $z_1'=\lambda z_1$，$z_2'=\lambda z_2$; 但这时

$$1=z_1'\bar{z}_1'+z_2'\bar{z}_2'=\lambda\bar{\lambda}(z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)=\lambda\bar{\lambda},$$

所以 $|\lambda|=1$. 因此，如果 $\phi(z_1,z_2)=[z_1,z_2]$，則 $\phi^{-1}[z_1,z_2]$ 由这样的点組成: 它們是由把 (z_1,z_2) 的每一个坐标乘以 $e^{i\theta}$; $-\pi<$ $<\theta\leqslant\pi$ 而得到. 换句話說，S^2 中的点的逆象集是 S^3 上的大圓. 我們有 S^2 的一个开复盖. 由 $S^2-[0,1]$ 和 $S^2-[1,0]$ 組成. 如果我們以 μ 記 z_1/z_2，当 $z_2=0$ 置 $\mu=\infty$，則我們可以称这些开集

是 S^2-0 和 R^2. 我們定义拓扑映象

$$\psi_1:(S^2-0)\times S^1\to\phi^{-1}(S^2-0)$$

为

$$\psi_1(\mu,\theta)=\left(\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+\frac{1}{|\mu|^2}}},\ \frac{e^{i\theta}}{\mu\sqrt{1+\frac{1}{|\mu|^2}}}\right),\ \mu\neq\infty$$

$$\psi_1(\infty,\theta)=(e^{i\theta},0),$$

并且我們定义拓扑映象 $\psi_2:R^2\times S^1\to\phi^{-1}(R^2)$ 为

$$\psi_2(\mu,\theta)=\left(\frac{\mu e^{i\theta}}{\sqrt{1+|\mu|^2}},\ \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+|\mu|^2}}\right).$$

于是映象 ϕ 就具有所要求的性質，从而它导出同构 $\phi_r:\pi_r(S^3,S^1)\approx\pi_r(S^2)$. 由于 S^1 在 S^3 上可以縮成一点，我們有[1]

$$\pi_r(S^3,S^1)\approx\pi_r(S^3)+\pi_{r-1}(S^1).$$

因而，如果 $r\geqslant 3$，从系 1.6 就得到

$$\pi_r(S^3)\approx\pi_r(S^3,S^1).$$

此外，这一同构是由內射

$$j_r:\pi_r(S^3)\to\pi_r(S^3,S^1)$$

导出，于是我們就有：

定理 2.1. 映象 $\phi:S^3\to S^2$ 导出同构 $\phi_r^*:\pi_r(S^3)\approx\pi_r(S^2)$, $r\geqslant 3$.

系 2.2. $\pi_3(S^2)$ 是由“霍卜夫”映象 $\phi:S^3\to S^2$ 的类生成的无限循环羣.

同法，我們可以定义 S^7 到 S^4 上的一个投射，且以 S^3 为纖維. 我們把 S^7 表作为使得 $|q_1|^2+|q_2|^2=1$ 的两个四元变数 (q_1,q_2) 的空間；S^4 表作为“四元射影直綫”，它的点是不全为零的两个数 q_1,q_2 的偶 $[q_1,q_2]$ 的类；$[q_1,q_2]$ 和 $[q_1',q_2']$ 属于同一类，如果存在一个四元数 q 使得 $q_1'=qq_1$, $q_2'=qq_2$. 如前，映象 $(q_1,q_2)\to$ $\to[q_1,q_2]$ 映 S^7 到 S^4 上，并且逆象集可以由逆象中的一个点把它的坐标乘以(在左边)单位模方四元数得到. 因此所有逆象集都是大的 3 維球. 再者我們取 $S^4-[0,1]$, $S^4-[1,0]$ 作为 S^4 的开

1) 参看第四章定理 5.1.

复盖,并且类似地定义拓扑映象 ψ_1, ψ_2.

由于 S^3 在 S^7 上可以缩成一点,我們有

$$\pi_r(S^7, S^3) \approx \pi_r(S^7) + \pi_{r-1}(S^3).$$

这样,連同同构 $\phi_r: \pi_r(S^7, S^3) \approx \pi_r(S^7) + \pi_{r-1}(S^3)$ 給出:

定理 2.3. $\pi_r(S^4) \approx \pi_r(S^7) + \pi_{r-1}(S^3)$.

系 2.4. $\pi_5(S^4) \approx \pi_4(S^3)$, $\pi_6(S^4) \approx \pi_5(S^3)$.

系 2.5. $\pi_7(S^4)$ 有一个作为直接加項的,由"霍卜夫"映象 $S^7 \to S^4$ 的类生成的无限階循环羣.

上面所給出的作法可以推广如下(我們施行的这种推广无疑地是在复数情形[1]).

我們可以把 S^{2n-1} 中的任意一点表作为 n 重复数 $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 且 $|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1$. $(n-1)$ 复数維数的复射影空間 M_n $(n \geqslant 2)$ 可以表作为 n 重数 $[z_1, \cdots, z_n]$ 的类所成的空間, z_i 不全为零,其中我們置 $[z_1, \cdots, z_n]$ 和 $[z_1', \cdots, z_n']$ 在同一类中,如果存在一个复数 λ 使 $z_i' = \lambda z_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 然后映象 $(z_1, \cdots, z_n) \to [z_1, \cdots, z_n]$ 是 S^{2n-1} 到复射影空間 M_n 的一个投射,并且纖維是 S^{2n-1} 上的大圓. 于是,正如在特殊情形 $n = 2$ 中,我們得到同构 $\pi_r(M_n) \approx \pi_r(S^{2n-1}) + \pi_{r-1}(S^1)$,从而有:

定理 2.6. $\pi_r(M_n) = \pi_r(S^{2n-1})$, $r \geqslant 3$, 并且 $\pi_2(M_n) = Z_\infty$.

系 2.7. 如果 M_3 是复射影平面,則

$$\pi_3(M_3) = \pi_4(M_3) = 0, \quad \pi_2(M_3) = \pi_5(M_3) = Z_\infty.$$

同法,我們可以定义 S^{4n-1} 到 $(n-1)$ 四元維数的四元射影空間上的一个投射,而纖維是 S^{4n-1} 上的大的 3 維球. 又正如在特殊情形 $n = 2$ 中,我們得到同构

$$\pi_r(Q_n) \approx \pi_r(S^{4n-1}) + \pi_{r-1}(S^3),$$

其中 Q_n 是 $(n-1)$ 四元維数(因而也就是 $(4n-4)$ 拓扑維数)的四元射影空間.

定理 2.8. $\pi_r(Q_n) \approx \pi_r(S^{4n-1}) + \pi_{r-1}(S^3)$.

---

1) "在实数情形中的推广"給出 $S^{n-1} \to P^{n-1}$,其中 P^{n-1} 是 $(n-1)$ 維实射影空間. 参看系 1.7.

系 2.9. $\pi_r(Q_n) \approx \pi_{r-1}(S^3)$, $r \leqslant 4n-2$, 并且 $\pi_{4n-1}(Q_n)$ 含有一个作为直接加项的，由"霍卜夫"映象 $S^{4n-1} \to Q_n$ 的类生成的无限循环羣.

凱利(Cayley)数全体形成一个阶 8 的非結合的可除代数. 假如我們打算施行一个如同在复数和四元数中那样的十分类似的处理，以获得 S^{15} 到 S^8 上的一个投射，則在企图定义相应于凱利数的非結合乘法的"凱利射影空間"时，我們要遇到一个癥結. 可是，我們能够稍稍变更一下定义而使得 S^{15} 表作为 S^8 上的纖維空間，且纖維是大的 7 維球. 不过，这种变更并不能使我們得以推广这样的处理，如我們在引向定理 2.6 和 2.8 前的論述中所作的那样.

我們把 S^{15} 取为适合于 $|X|^2+|Y|^2=1$ 的凱利数偶 (X, Y) 的空間. "凱利直綫" $Y=CX$ 以及"直綫" $X=0$ 互不相交(自然，原点除外)，并且产生 R^{16}. 我們把 S^{15} 在 $Y=CX$ 上的所有点与凱利数 C 相应，在 $X=0$ 上的所有点与无穷远点(它把 8 維欧几里得空間 R^8 封閉成 S^8)相应. 这样我們得到 S^{15} 到 S^8 上的一个映射并且原象集是"凱利直綫". 对于固定的 C，方程 $Y=CX$ 实际上是 R^{16} 中的 16 个坐标内的 8 个齐次綫性方程的一个集合，因而"凱利直綫" $Y=CX$ 是 R^{16} 中的 8 維超平面經过 S^{15} 的中心且因之交 S^{15} 于大的 7 維球內. 如前，我們取 R^8 和 S^8-0[1] 作为 S^8 的复盖并且定义

$\psi_1: R^8 \times S^7 \to \phi^{-1}(R^8)$ 为

$$\psi_1(C, D)=\left(\frac{D}{\sqrt{1+|C|^2}}, \frac{CD}{\sqrt{1+|C|^2}}\right)$$

以及 $\psi_2: (S^8-0) \times S^7 \to \phi^{-1}(S^8-0)$ 为

$$\psi_2(C, D)=\left(\frac{\frac{D}{C}}{\sqrt{1+\frac{1}{|C|^2}}}, \frac{D}{\sqrt{1+\frac{1}{|C|^2}}}\right)$$

$$\psi_2(\infty, D)=(0, D),$$

(C 是一个凱利数，D 是一个单位模方凱利数).

1) 0 是 R^8 的坐标原点. 当 R^n 为一个无穷远点所封閉时，某些作者把它写作 Z^n

其中 D/C 意指方程 $CA = D$ 的解 A.

于是我們得到一个"霍卜夫"映象 $S^{15} \to S^8$ 以 S^7 为纤維，从而有：

定理 2.10. $\pi_r(S^8) \approx \pi_r(S^{15}) + \pi_{r-1}(S^7)$.

系 2.11. $\pi_r(S^8) \approx \pi_{r-1}(S^7)$, $r \leqslant 14$.

系 2.12. $\pi_{15}(S^8)$ 包含一个作为直接加項的，由"霍卜夫"映象 $S^{15} \to S^8$ 的类生成的无限階循环羣.

本节內处理过的所有的纤維，本質上都为霍卜夫在他的論文"Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigeres Dimension", *Fundament. Math.*, 1935, 427—440 頁中所描述过，虽然在这里他沒有勾画出适用于球和射影空間同伦羣上的全部知識.

3. 球上的纤維空間. 霍卜夫纤維映象 $S^3 \to S^2$, $S^7 \to S^4$, $S^{15} \to S^8$ 是一个球上的纤維空間的例子. 于本节內我們考慮一些化簡了的情形，假如底空間是一个球它們可以从一般理論中得出. 不过在这样作以前，我們要引进纤維空間的同伦序列.

設 $\phi: X \to Y$ 是 X 到 Y 上的一个投射，且纤維是 A. 这时如果 A_0 是 $y_0 \in Y$ 上的纤維，我們知道 ϕ 导出同构 $\phi_r: \pi_r(X, A_0) \approx \pi_r(Y)$. 給定偶 (X, A_0) 的正合序列，即

$$\cdots \to \pi_{n+1}(X, A_0) \xrightarrow{d_{n+1}} \pi_n(A_0) \xrightarrow{i_n} \pi_n(X) \xrightarrow{j_n} \pi_n(X, A_0) \to \cdots,$$

記

$$\bar{j}_n = \phi_n j_n, \quad \bar{d}_{n+1} = d_{n+1}\phi_{n+1}^{-1},$$

我們引出一个新的正合序列，即

$$\cdots \to \pi_{n+1}(Y) \xrightarrow{\bar{d}_{n+1}} \pi_n(A_0) \xrightarrow{i_n} \pi_n(X) \xrightarrow{\bar{j}_n} \pi_n(Y) \to \cdots \quad (3.1)$$

叫作纤維空間 X 的同伦序列[1]. 显然它是正合的.

現在让我們假定 $Y = S^m$. 由于 $\pi_r(S^m) = 0$, $r < m$, 从序列 (3.1) 的正合性推出

1) 投射 $\phi: X \to Y$ 导出同构 $\bar{j}_n$; $\bar{j}_1$ 自然是一个同态，尽管 $\pi_1(X, A_0)$ 沒有給定一个羣的构造.

$$\pi_n(A_0) \approx \pi_n(X), \quad n \leqslant m-2. \tag{3.2}$$

同时也就有 i_{m-1} 映射 $\pi_{m-1}(A_0)$ 到 $\pi_{m-1}(X)$ 上，并且 i_{m-1} 的核是 $\bar{d}_m\pi_m(S^m)$. 由于 $\pi_m(S^m)$ 是无限阶循环的，$\bar{d}_m\pi_m(S^m)$ 是循环的. 假定它由 η 所生成，于是 $\eta \in \pi_{m-1}(A_0)$. 某些作者把 η 叫作 S^m 上纖維空間 X 的特征类. 为了找出 η 的一个代表，我們选取一个映象

$$f: E^m, S^{m-1} \xrightarrow{1} X, A_0$$

代表 $\phi_m^{-1}(1)$，其中 1 生成 $\pi_m(S^m)$，然后截縮 f 于 S^{m-1}. 映象 f 可以取作 E^m 的內点集上的同胚映象.

定理 3.3. 纖維空間 X 有一个截面，当而且僅当 $\eta = 0$.

我們回忆一个截面乃是一个映象 $g: Y \to X$ 使得 $\phi g = 1$. 假定一个截面是存在的. 現在映象 ϕ 导出同态 $\bar{j}_n: \pi_n(X) \to \pi_n(S^m)$. 由于 ϕ 有一个右逆映象，这些同态一定是到 $\pi_n(S^m)$ 上的. 特别 $\bar{j}_m$ 映 $\pi_m(X)$ 到 $\pi_m(S^m)$ 上，因此，据正合性，$\bar{d}_m$ 映 $\pi_m(S^m)$ 成 0，否則 $\eta = 0$.

現在設 $\eta = 0$. 然后，据正合性，$\bar{j}_m$ 映 $\pi_m(X)$ 到 $\pi_m(S^m)$ 上. 这蘊含着存在一个映象 $g': S^m \to X$ 使得 $\phi g' \sim 1: S^m \to S^m$; 但这时定理 1.2 保証 $g' \sim g: S^m \to X$ 且 $\phi g = 1$，而 g 即为所求的截面.

定理 3.4. 如果投射 $X \to Y$ 有一个截面，則

$$\pi_n(X) \approx \pi_n(Y) + \pi_n(A_0), \quad n \geqslant 2.$$

因設 $g: Y \to X$ 是一个映象使得 $\phi g = 1$，而且 g 导出 $\gamma_n: \pi_n(Y) \to \to \pi_n(X)$，則 $\bar{j}_n\gamma_n = 1: \pi_n(Y) \approx \pi_n(Y)$，由此，如果 $n \geqslant 2$ 則 $\pi_n(X) = = \gamma_n\pi_n(Y) + \bar{j}_n^{-1}(0)$，并且 γ_n 是同构. 現在 $\bar{j}_n^{-1}(0) = i_n\pi_n(A_0)$，据正合性，由 $\bar{j}_{n+1}$ 是到 $\pi_{n+1}(Y)$ 上这一事实，就得知 i_n 是同构. 这就証明了定理[1].

作为一个例子，我們研究 S^n 上的单位切向量空間. 截面的存在性这时就等价于 S^n 上的切向量場的存在性. 事实上，由考慮史第弗(Stiefel)流形，我們可以推广这个問題. 史第弗流形 $V_{n,m}$ 是

1) 如果我們取 $X = S^3$, $Y = S^2$, $A_0 = S^1$, $n = 2$, 我們看到投射 $\phi: S^3 \to S^2$ 沒有一个截面. 事实上，任一霍卜夫纖維化都沒有.

这样的流形，它的点是 R^n 中 m 个单位正交向量系。对于 $a\in V_{n,m}$ 对应于 $\phi^{(k)}(a)\in V_{n,k}$，由 a 的起始的 k 个向量給出。給定 $\phi^{(k)}(a)$，我們可以自由地选取 a 的其余 $(m-k)$ 个向量，从正交于 $\phi^{(k)}(a)$ 的 $(n-k)$ 維子空間。于是可以示明 $\phi^{(k)}$ 是 $V_{n,m}$ 到 $V_{n,k}$ 上的一个投射且纖維是 $V_{n-k,m-k}$。

如果我們在 R^n 中固定一个正交坐标系，则 $a\in V_{n,m}$ 由滿足 $AA'=I_m$ 的一个 m 行和 n 列的矩陣 A 給出，其中 I_m 是 m 行的单位矩陣。注意，当矩陣 $B\in V_{n-k,m-k}$ 恆同于

$$\left\|\begin{matrix} I_k & O_{k,n-k} \\ O_{m-k,k} & B \end{matrix}\right\|\in V_{n,m},$$

$V_{n-k,m-k}$ 变为 $V_{n,m}$ 的一个子空間。

如果 $m=1$，则 $V_{n,1}$ 中的点是 R^n 中的单位向量，而 $V_{n,1}$ 这时就同胚于 S^{n-1}。于是我們可以恆同 $V_{n+1,1}$ 于 S^n，且 $V_{n+1,2}$ 于 S^n 的单位切向量空間；因为我們只需平移第二个向量到第一个的端点。类似地，$V_{n+1,m+1}$ 是 S^n 的 m 个单位正交切向量的集合的空間。再者，映象 $\phi: V_{n+1,m+1}\to S^n$，它仅仅把切向量的一个集合对应于它們所作用的点上，是与投射 $\phi^{(1)}: V_{n+1,m+1}\to V_{n+1,1}$ 是一样的，因为每一个投射都是取矩陣 A 的第一列为象元的。

現在設 $a\in V_{n,n-1}$ 为矩陣 A 所代表。然后 A 可以在一个精确的方法下完成：由添加一个第 n 列以給出一个行列式为 $+1$ 的正交矩陣。在这一方法下，$V_{n,n-1}$ 可以恆同于单位模正交羣，或**旋轉羣** Ω_n[1]。投射 $\phi: \Omega_{n+1}\to S^n$，具有纖維 Ω_n，这时就可以看作是本章开始时例(v)中的特殊情形，其中我們摘出了 $p_0=(1,0,\cdots,0)\in S^n$ 并且定义 $\phi(\omega)=\omega(p_0)$，$\omega=\Omega_{n+1}$。

如果我們考虑投射 $\phi: V_{n+1,m+1}\to S^n$，具有纖維 $V_{n,m}$，我們看到

$$\pi_r(V_{n,m})\approx\pi_r(V_{n+1,m+1}),\quad r<n-1, \tag{3.5}$$

---

1) 旋轉羣是全体正交羣的恆等分量。因此，如果我們在一个显然的方法下扩张同伦羣的定义，则旋轉羣的同伦羣和正交羣是同一的。

和

$$\pi_{n-1}(V_{n,m})/\bar{d}_n\pi_n(S^n) \approx \pi_{n-1}(V_{n+1,\,m+1}). \qquad (3.6)$$

由定理 3.3，存在性問題，或者說 S^n 上的一个 m 个单位正交切向量場的有无問題，就恰如 $\bar{d}_n\pi_n(S^n)$ 的生成元是否为零的問題。

現在設 E^n 是点 $x=(x_0,\cdots,x_n)$，$x_0^2+\cdots+x_n^2=1$ $(x_0\geqslant 0)$ 的集合，并且設 S^{n-1} 是它的边界，由 $x\in E^n$，$x_0=0$ 給出[1]。設 $u: E^n\to V_{n+1,\,m+1}$ 是映象，由矩陣

$$u_{ij}(x)=\delta_{ij}-2x_ix_j, \quad i=0,\cdots,m,\ j=0,\cdots,n$$

給出，其中 δ_{ij} 是柯朗尼克 (Kronecker) 符号。然后容易証明 $\|u_{ij}(x)\|\in V_{n+1,\,m+1}$，而 ϕu 拓扑地映 E^n-S^{n-1} 到 $S^n-(1,0,\cdots,0)$ 上，并且 $\phi u(S^{n-1})=(1,0,\cdots,0)$（注意：局限于考虑 $i=0$，我們得到 ϕ)。这样如果我們限制 u 于 S^{n-1}，我們得到 $\bar{d}_n\pi_n(S^n)$ 的一个生成元的一个代表。这就是映象 $t: S^{n-1}\to V_{n,\,m}$，它由

$$t_{ij}(x)=\delta_{ij}-2x_ix_j, \quad i=1,\cdots,m, \quad j=1,\cdots,n$$

給定，其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in S^{n-1}$，因而 $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$。

設我們置 $m=1$。这时 t 是 S^{n-1} 到 S^{n-1} 內的一个映射，由

$$t(x_1,\cdots,x_n)=(1-2x_1^2,\ -2x_1x_2,\cdots,\ -2x_1x_n)$$

給出。

現在[2] $t|E_+^{n-1}(x_1\geqslant 0)$ 是 E_+^{n-1} 到 S^{n-1} 上的一个映象，它是 E_+^{n-1} 的內点集到 $S^{n-1}-(1,0,\cdots,0)$ 上的同胚映象并且 t 映边界 S^{n-2} 成 $(1,0,\cdots,0)$。同时 $(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $(x_1',\cdots,x_n')$ 在 t 下有相同的象，当而且只当 $x_i'=-x_i$；$i=1,\cdots,n$。由于映象 $(x_1,\cdots,x_n)\to(-x_1,\cdots,-x_n)$ 有度数 $(-1)^n$，从而 t 有度数 $1+(-1)^n$。这样我們就証明了：

定理 3.7. S^n 有一个切向量場，当而且只当 n 是奇數。

因为一个映象 $t: S^{n-1}\to S^{n-1}$ 是零伦的，当而且只当它有度数零。这方面的更进一步的結果已經由 G. W. 威脫海特，埃克曼

1) 注意"共轭坐标系"的改变。

2) 这里我們用記号 E_+^{n-1} 代表 S^{n-1} 的，由 $x_1\geqslant 0$ 給定的半球。

(B. Eckmann), N. E. 史挺路德和其他一些人所得出. 讀者可参考 N. E. 史挺路德所著的 Topology of Fibre Bundles, 142 頁(普林斯頓出版).

注意,从定理 3.4 和 3.7 我們总結出

$$\pi_r(V_{n+1,2}) \approx \pi_r(S^n) + \pi_r(S^{n-1}), \quad r \geqslant 2, n \text{ 是奇数}.$$

从(3.5)显然有 $\pi_1(V_{n+1,2}) = 0$,由于 $n \geqslant 3$,如果 n 是奇数,則

$$\pi_r(V_{n+1,2}) \approx \pi_r(S^n) + \pi_r(S^{n-1}). \tag{3.8}$$

我們再来研究当 n 是偶数时的 $\pi_r(V_{n+1,2})$.

定理 3.9. 如果 n 是偶數,內射

$$i_n: \pi_n(V_{n,m}) \to \pi_n(V_{n+1,m+1})$$

是到 $\pi_n(V_{n+1,m+1})$ 上的.

从正合序列推出

$$\pi_n(V_{n,m}) \xrightarrow{i_n} \pi_n(V_{n+1,m+1}) \xrightarrow{\bar{j}_n} \pi_n(S^n) \xrightarrow{\bar{d}_n} \pi_{n-1}(V_{n,m}),$$

我們需要証明 $\bar{d}_n$ 是一个同构. 現在投射 $V_{n,m} \to S^{n-1}$ 变换 $\bar{d}_n\pi_n(S^n)$ 的生成元为 $\pi_{n-1}(S^{n-1})$中的一个类,这个类由定理 3.7証明中討論过的映象代表. 我們看到,如果 n 是偶数, t 代表元素 $2 \in \pi_{n-1}(S^{n-1})$. 这样, $\bar{d}_n\pi_n(S^n)$ 的在由投射 $V_{n,m} \to S^{n-1}$ 导出的同态 $\pi_{n-1}(V_{n,m}) \to$ $\to \pi_{n-1}(S^{n-1})$ 中的象是一个无限阶循环羣,因此 $\bar{d}_n\pi_n(S^n)$ 是无限循环的,这蘊含着 $\bar{d}_n$ 是一个同构. 这就証明了定理.

再論及我們所研究的投射 $\phi: V_{n+1,m+1} \to S^n$, 具有纖維 $V_{n,m}$. 考虑一下投射 $\phi' = \phi^{(m-1)}: V_{n,m} \to V_{n,m-1}$, 具有纖維 $V_{n-m+1,1} =$ $= S^{n-m}$ 也同样是有利的. 从"纖維"序列

$$\pi_r(S^{n-m}) \xrightarrow{i_r} \pi_r(V_{n,m}) \xrightarrow{\bar{j}_r} \pi_r(V_{n,m-1}) \xrightarrow{\bar{d}_r} \pi_{r-1}(S^{n-m}),$$

就有

$$\pi_r(V_{n,m}) \approx \pi_r(V_{n,m-1}), \quad r < n - m \tag{3.10}$$

和

$$\pi_{n-m}(V_{n,m})/i_{n-m}\pi_{n-m}(S^{n-m}) \approx \pi_{n-m}(V_{n,m-1}). \tag{3.11}$$

假定現在我們置 $m = n - 1$. 这时 $S^{n-m} = S^1$ 并且 $V_{n,n-1}$ 是旋轉羣 Ω_n. 由于 $\pi_r(S^1) = 0$, $r \geqslant 2$, 我們有

$$\pi_r(\Omega_n) \approx \pi_r(V_{n,n-2}), \quad r \geqslant 3. \qquad (3.12)$$

Ω_2 仅仅是圓；并且可以示明 Ω_3 是 3 維射影空間. （例如，S^2 的任何旋轉是围繞一根直綫的旋轉；如果我們在这一直綫上标出綫段 $\langle -\pi, \pi \rangle$，綫段上的一个点就唯一地决定一个旋轉，这里我們把 $-\pi$ 与 π 恆同看待）. 因此 $\pi_1(\Omega_2) = Z_\infty$, $\pi_1(\Omega_3) = Z_2$，据(3.5)并且有

$$\pi_1(\Omega_n) = Z_2, \quad n \geqslant 3. \qquad (3.13)$$

由(3.6)，又有 $\pi_2(\Omega_2) = 0$，$\pi_2(\Omega_3) = 0$，$\pi_2(\Omega_4) = 0$，并且由(3.5)有

$$\pi_2(\Omega_n) = 0, \text{对所有的 } n. \qquad (3.14)$$

現在让我們把 S^3 表作单位模方四元数的空間. 这时 $\phi: \Omega_4 \to S^3$ 由 $\phi(r) = r(1)$, $r \in \Omega_4$ 所定义. 我們可以定义一个映象 $f: S^3 \to \Omega_4$，据 $f(q)(q') = qq'$, $q, q' \in S^3$. 由于 $|qq'| = 1$，显然 $f(q) \in \Omega_4$. 且有 $\phi f(q) = f(q)(1) = q$，所以 f 是一个截面. 于是[1] $\pi_n(\Omega_4) \approx \pi_n(\Omega_3) + \pi_n(S^3)$ $(n \geqslant 2)$，或

$$\pi_n(\Omega_4) \approx \pi_n(S^3) + \pi_n(S^3), \quad n \geqslant 2. \qquad (3.15)$$

这样，$\pi_3(\Omega_2) = 0$，$\pi_3(\Omega_3) = Z_\infty$，$\pi_3(\Omega_4) = Z_\infty + Z_\infty$，并且据(3.6)，$\pi_3(\Omega_5)$ 是 $Z_\infty + Z_\infty$ 的一个同态象，后者的核是 Z_∞ 或零. 据(3.5)，所有的 $\Omega_n (n \geqslant 5)$ 有同构的第三个同伦羣.

上面給出的映象 $f: S^3 \to \Omega_4$，显然地代表 $\pi_3(\Omega_4)$ 的一个生成元 σ. 其它的生成元可以由一个映象 $S^3 \to \Omega_3$ 代表. 事实上，設 $g: S^3 \to \Omega_4$ 由

$$g(q)(q') = qq'q^{-1}$$

所給定. 这时如果 S^2 表作为"純虚的"单位模方四元数(我們把形如 $0\mathbf{e} + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ 的四元数，其中的 $\mathbf{e}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ 是四元数单位，叫作"純虚的"四元数)，由 $g(q)$ 是一个旋轉和 $q1q^{-1} = 1$ 这一事实就知道 $g(q)$ 的确属于 Ω_3. 并且，$g(q)$ 是单位元，当而且只当 $q = 1$ 或 -1. 于是 g 正是 S^3 到 3 維射影空間的重复盖[2]，所以 g

---

1) 注意，这蘊含着內射 $\pi_n(\Omega_3) \to \pi_n(\Omega_4)$ 同构地映射 $\pi_n(\Omega_3)$.

2) 不难証明，g 映 S^3 到 Ω_3 上.

代表 $\pi_3(\Omega_3)$ 的一个生成元。因此，如果 g 代表 $\rho\in\pi_3(\Omega_4)$，我們便証明了 $\pi_3(\Omega_4)=Z_\infty+Z_\infty$ 由 ρ 和 σ 生成。

定理 3.16. $\pi_3(\Omega_5)$ 是无限循环的，由 σ 的象生成。又內射 $\pi_3(\Omega_4)\to\pi_3(\Omega_5)$ 的核由 $-\rho+2\sigma$ 生成。

証明依賴于下面的引理，它的性趣远超出我們的特殊应用：

引理 3.17. 如果 G 是一个單位元为 e 的拓扑羣而且 $f_i: I^n, \dot{I}^n\to G, e$ 代表 $\alpha_i\in\pi_n(G,e)$，$i=1,2$，則 $\alpha_1+\alpha_2$ 由

$$f_1f_2(t)=f_1(t)f_2(t),\quad t\in I^n$$

所給定的映象 $f_1f_2: I^n, \dot{I}^n\to G, e$ 代表。

設 $f_1'=f_1+0$，$f_2'=0+f_2$，即 $f_1'(t_1,\cdots,t_n)=f_1(2t_1,\cdots,t_n)$，$0\leqslant t_1\leqslant\frac{1}{2}$，$f_1'(t_1,\cdots,t_n)=e$，$\frac{1}{2}\leqslant t_1\leqslant 1$，并且对于 f_2' 也一样，然后

$$f_i'\sim f_i: I^n, \dot{I}^n\to G, e,$$

从而 $f_1'f_2'\sim f_1f_2: I^n, \dot{I}^n\to G, e$。但是 $f_1'f_2'=f_1+f_2$。这就有

$$f_1+f_2\sim f_1f_2: I^n, \dot{I}^n\to G, e,$$

从而 f_1f_2 代表 $\alpha_1+\alpha_2$。

回到定理上来，我們看到映象

$$h(q)=g(q)^{-1}(f(q))^2\in\Omega_4$$

由 $(h(q))(q')=g(q)^{-1}(q^2q')=qq'q$ 所給定。另一方面，据引理 $h: S^3\to\Omega_4$ 代表 $-\rho+2\sigma\in\pi_3(\Omega_4)$。

現在內射 $\pi_3(\Omega_4)\to\pi_3(\Omega_5)$ 的核是循环羣 $\bar{d}_4\pi_4(S^4)$。我們已經看到，如果 Ω_4 与 $V_{4,3}$ 恆同看待，那末 $\bar{d}_4\pi_4(S^4)$ 的一个生成元就由映象

$$t: S^3\to V_{4,3}$$

代表，这个映象由

$$t_{ij}(x)=\delta_{ij}-2x_ix_j,\qquad i=1,2,3;\quad j=1,2,3,4$$

所給定，其中 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in S^3$。

如果我們把 $V_{4,3}$ 与 Ω_4 如上面所說的恆同起来，由添加一个第四列到 $V_{4,3}$ 的矩陣，我們得到

$$t_{4j}(x)=2x_4x_j-\delta_{4j},\quad j=1,2,3,4.$$

这样

$$t(x)=\begin{Vmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-1\end{Vmatrix}\|\delta_{ij}-2x_ix_j\|,\quad i,j=1,2,3,4;\quad t:S^3\to\Omega_4.$$

如果我們代替 t 为

$$t'(x)=\begin{Vmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{Vmatrix}\|\delta_{ij}-2x_ix_j\|$$

所給定的 t',那末显然的 t' 也代表 $\bar{d}_4\pi_4(S^4)$ 的一个生成元而且有这样的性质: $t'(1,0,0,0)$ 是单位矩陣. 我們要来証明映象 h 和 t' 重合. 首先我們把四元数 $q=x_1+x_2\mathbf{i}+x_3\mathbf{j}+x_4\mathbf{k}$, $|q|=1$ 与点 (x_1,x_2,x_3,x_4) 恆同起来. 然后我們看到, 由于 $V_{4,3}$ 是被投射到 S^3 上通过取矩陣的第一列, 由于 Ω_4 是投射到 S^3 上通过取 $\phi(r)=r(1)$, 其中 $r\in\Omega_4$, 并且 1 是单位四元数, $=(1,0,0,0)$, 为了一致性我們就必須使 Ω_4 右作用在对应于 S^3 的点的列向量上. 这样我們必需証明:如果 $q=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $q'=(x_1',x_2',x_3',x_4')$, 則

$$qq'q=(x_1',x_2',x_3',x_4')\begin{Vmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{Vmatrix}\|\delta_{ij}-2x_ix_j\|$$

$$=(-x_1',x_2',x_3',x_4')\|\delta_{ij}-2x_ix_j\|.$$

如果 $q'=1,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$, 由綫性性质足够証明这一事实, 如果 $q'=1,\mathbf{i}$, 由对称性足够証明它. 我們重忆一下, $|q|=1$.

現在

$$q^2=x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2+2x_1x_2\mathbf{i}+2x_1x_3\mathbf{j}+2x_1x_4\mathbf{k}=$$
$$=(2x_1^2-1,\ 2x_1x_2,\ 2x_1x_3,\ 2x_1x_4),$$
$$=(-1,0,0,0)\|\delta_{ij}-2x_ix_j\|.$$

又

$$qiq = (-x_2 + x_1\mathbf{i} + x_4\mathbf{j} - x_3\mathbf{k})(x_1 + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k})$$
$$= -2x_1x_2 + (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\mathbf{i} - 2x_2x_3\mathbf{j} - 2x_2x_4\mathbf{k}$$
$$= (-2x_1x_2, 1 - 2x_2^2, -2x_2x_3, -2x_2x_4),$$
$$= (0, 1, 0, 0)\|\delta_{ij} - 2x_ix_j\|.$$

这样,映象 t' 和 h 重合,所以 h 代表 $i_3:\pi_3(\Omega_4) \to \pi_3(\Omega_5)$ 的核的一个生成元,从而核就由 $-\rho + 2\sigma$ 生成。这时显然地,$\pi_3(\Omega_5)$ 是无限循环的,它由 $i_3\sigma$ 生成。

定理 3.18. $\pi_3(\Omega_n) = Z_\infty$, $n \geqslant 5$,由 σ 的象生成.

以后我們将要回到旋轉羣的同伦羣的进一步的計算.

4. 伪纖維空間的附录[1]. 我們已經看到过纖維空間上的基本定理是定理 1.1 和 1.2. 色尔(J.-P. Serre)和其他的作者所采用的論点是:一个纖維空間应該用这些性質来定义. 于是我們作这样的定义:X 是 Y 上的投射为 ϕ 的一个*伪纖維空間*,如果有一个 X 到 Y 上的映象 $\phi: X \to Y$ 使得定理 1.2 成立.

定理 4.1. 如果 X 是 Y 上的投射为 ϕ 的一个伪纖維空間,假定附加条件:K 可以縮成一点,則定理 1.1 成立.

我們首先注意到,如果 $K = L \times I^n$, L 恆同地看作 $L \times 0$,則定理立即得出(对 n 用归納法).

現在設 K' 是由把 L 恆同于一个点 $(p' \in K')$ 从 K 得到的空間,并且設 K' 的一个适当的剖分同胚地嵌作 I^n 的一个子复合形对某一 n,以至于 p' 当作点 0. 設 i 是映射 $K \to K' \subset I^n$,r 是保核收縮 $K \to L$. 映象

$$h: K \to L \times I^n$$

由 $h(p) = (r(p), i(p))$, $p \in K$ 給定,显然是到 $L \times I^n$ 的一个适当剖分上的一个子复合形上的同胚映象(因为是一一对应的和連續的),并且 $h(K)$ 是 $L \times I^n$ 的一个收縮核[2]. 恆同 $h(K)$ 与 K,于是

---

1) 本节于初讀时可以略去.

2) 正是在这一点上我們用到 K 是可縮的这一事实,并且应用同伦扩张定理到偶 $(B \times I^n, h(K))$. 由于恆同映象 $h(K) \to h(K)$ 可以变形为一个常值映象,并且由于一个常值映象可以对于 $L \times I^n$ 扩张,因而恆等映象 $h(K) \to h(K)$ 也可有这样的扩张.

我們可以扩张 $g: K \to Y$ 为 $g': L \times I^n \to Y$。由前面的注意，f_0 可以扩张为 $f': L \times I^n \to X$ 且 $\phi f' = g'$，限制 f' 于 K，定理就得到証明。

应該注意到，我們显然地可以放寬定理 1.1 的条件，只需要求 L 是 K 的一个收縮核。不过，可以証明一个单純复合形的收縮核事实上是一个形变收縮核。

让我們再陈述定理 4.1 的内容。設 (X, Y, ϕ) 是由两个空間 X, Y 以及 X 到 Y 上的映象 ϕ 組成的三数組。我們說 (X, Y, ϕ) 具有性質 Q，如果它滿足定理 1.2. 我們說 (X, Y, ϕ) 具有性質 P，如果它滿足由添加条件：K 是可縮的，而修改了的定理 1.1. 这时定理 4.1 断言：如果 (X, Y, ϕ) 具有性質 P，則它同时具有性質 Q. 事实上，我們还可以証明：如果 (X, Y, ϕ) 具有性質 Q，則它也具有性質 P[1]。为此設 f_0 是一个单純复合形 K 到 X 内的映象，并且設 $g_0 = \phi f_0: K \to Y$ 有同伦 g_t。我們作这样的归納假定：$f_0 | K^n = f_0^n$，有同伦 $f_t^n: K^n \to X$ 使得 $\phi f_t^n = g_t | K^n$。設 σ^{n+1} 是 K 的任意的 $(n+1)$ 維单純形。定义 $F': \sigma^{n+1} \times 0 \cup \dot{\sigma}^{n+1} \times I \to X$ 为 $F'(p, 0) = f_0(p)$, $p \in \sigma^{n+1}$, $F'(q, t) = f_t^n(q)$, $q \in \dot{\sigma}^{n+1}$, $t \in I$. 然后 $\phi F': \sigma^{n+1} \times 0 \cup \dot{\sigma}^{n+1} \times I \to Y$ 有扩张

$$G: \sigma^{n+1} \times I \to Y,$$

由 $G(p, t) = g_t(p)$, $p \in \sigma^{n+1}$, $t \in I$ 給定。現在 $\sigma^{n+1} \times I$ 是可縮的，$\sigma^{n+1} \times 0 \cup \dot{\sigma}^{n+1} \times I$ 是 $\sigma^{n+1} \times I$ 的一个（形变）收縮核，并且 (X, Y, ϕ) 有性質 Q。于是 F' 有扩张 $F: \sigma^{n+1} \times I \to X$ 使得 $\phi F = G$。我們可以施这一步驟于 K 的每一个 $(n+1)$ 維单純形，因而扩张 f_t^n 为 $f_t^{n+1}: K^{n+1} \to X$，使得 $\phi f_t^{n+1} = g_t | K^{n+1}$。最后，我們获得所希望的同伦，使得 $\phi f_t = g_t$。这样，如果三数組 (X, Y, ϕ) 有性質 P 或者等价地，有性質 Q，我們便可以說 X 是 Y 上的以 ϕ 为投射的伪纖維空間。

設我們称集合 $\phi^{-1}(y)$, $y \in Y$ 为纖維（或伪纖維）。这时如果

---

1) 这一个注并不是显見的，因为当 K 是可縮的时候我們只能假定定理 1.1 的結果。

A_0 是 $y_0 \in Y$ 上的纖維，并且 ϕ 导出

$$\phi_r: \pi_r(X, A_0) \to \pi_r(Y),$$

則定理 1.3 成立，所以 $\phi_r: \pi_r(X, A_0) \approx \pi_r(Y)$. 如果 i_n, j_n, d_n 是偶 (X, A_0) 的同伦序列的同态，且 $\bar{d}_{n+1} = d_{n+1}\phi_{n+1}^{-1}$, $\bar{j}_n = \phi_n j_n$, 則我們得到正合序列

$$\cdots \to \pi_{n+1}(Y) \xrightarrow{\bar{d}_{n+1}} \pi_n(A_0) \xrightarrow{i_n} \pi_n(X) \xrightarrow{\bar{j}_n} \pi_n(Y) \to \cdots.$$

推广到伪纖維空間的重要性在于它們能应用于映象空間.

給定两个弧式連通的空間 X 和 Y, 設 Y^X 代表映象 $f: X \to Y$ 的全体所成的空間且有紧致的开拓扑結构[1]. 設 $E_{A,B}$ 是由合于 $f(0) \subset A$, $f(1) \subset B$ 的映象 $f: I \to Y$ 所組成的空間(即起点在 A 內而終点在 B 內的路程空間)的子空間. 这时 $E_{y,y}$ 是 Y 上的基点为 y 的閉路程的空間. 我們把 $E_{y,y}$ 写作 Z_y. 定义投射 $\phi: E_{A,B} \to A \times B$ 为 $\phi(f) = (f(0), f(1))$.

定理 4.2. $E_{A,B}$ 是 $A \times B$ 上的,投射为 ϕ 的伪纖維空間.

我們証明过:如果 f_0 是映一个(有限的)单純复合形 K 入 $E_{A,B}$ 的映象,并且 $g_0 = \phi f_0: K \to A \times B$ 有同伦 $g_t: K \to A \times B$,則 f_0 有一个同伦 $f_t: K \to E_{A,B}$ 使得 $g_t = \phi f_t$. 事实上,我們要証明这一陈述当 K 为一个任意空間 P 代替时仍然成立.

設 P 是一个任意的空間,設 f_0 是一个映象 $P \to E_{A,B}$,并且設 g 是一个映象 $P \times I \to A \times B$ 使得 $\phi f_0(x) = g(x, 0)$, $x \in P$. 設 $g(x, t) = (g_A(x, t), g_B(x, t))$,因而 g_A, g_B 分别是映象 $P \times I \to A$, $P \times I \to B$. 設 $h_0: P \times I \to Y$ 是由 $h_0(x, t) = (f_0(x))(t)$, $x \in P$, $t \in I$ 給定的映象. 于是,由定义

$$h_0(x, 0) = g_A(x, 0), \quad h_0(x, 1) = g_B(x, 0).$$

---

1) 設 $\mathbf{C}$ 是 X 的所有紧緻子集的集合, $\mathbf{G}$ 是 Y 的所有开子集的集合。然后 Y^X 的开集合的一个子基的一个元素是一个集合 U, 它由映 X 入 Y 的这样的映象 f 所組成;对于一个特别的 $C \in \mathbf{C}$ 和一个特别的 $G \in \mathbf{G}$, 使得 $f(C) \subset G$. 我們所需要的 Y^X 上的拓扑結构的基本性質是: 如果 $\phi: Z \to Y^X$, $\psi: Z \times X \to Y$ 是由 $(\phi(z))(x) = \psi(z, x)$, $z \in Z$, $x \in X$ 联系着的变换, 則 ϕ 是連續的,当而且只当 ψ 是連續的。假如 Y^X 有紧緻的开拓扑結构并且 X 是局部紧緻的,那末这就成立。

我們需要寻求一个映象 $f: P \times I \to E_{A,B}$ 使得 $f(x, 0) = f_0(x)$，$\phi f(x, t) = g(x, t)$. 这等价于去寻求一个映象

$$h: P \times I \times I \to Y$$

使得

$$h(x, t, 0) = h_0(x, t),$$
$$h(x, 0, t) = g_A(x, t),$$
$$h(x, 1, t) = g_B(x, t).$$

由于 $I \times 0 \cup 0 \times I \cup 1 \times I$ 是 $I \times I$ 的一个收縮核，这样的一个映象 h 可以找到，而定理得到証明.

定理 4.3. 如果 A 可以在 Y 上变形为一个点 y，則 $E_{A,B} \sim A \times \times E_{y,B}$.

設 $F: A \times I \to Y$ 是一个映象，使得 $F(a, 0) = a$，$F(a, 1) = y$，$a \in A$. 設 f_a 是由 $f_a(t) = F(a, t)$ 給定的路程；f'_a 是由 $f'_a(t) = = F(a, 1-t)$ 給定的路程. 設 $\phi: A \times E_{y,B} \to E_{A,B}$ 由 $\phi(a, f) = = f_a + f$ 給定[1)]，并且設 $\psi: E_{A,B} \to A \times E_{y,B}$ 給定为

$$\psi(g) = (a, f'_a + g),$$

其中 $a = g(0)$. 于是

$$\phi\psi(g) = f_a + f'_a + g,\ a = g(0),$$
$$\psi\phi(a, f) = (a, f'_a + f_a + f).$$

由于 $f_a + f'_a$ 和 $f'_a + f_a$ 都同伦于常值映象，保持 0 的象不动（一种情形在 a，另一种情形在 y），这就有 $\phi\psi \sim 1$，$\psi\phi \sim 1$，从而定理得証.

定理 4.4. $E_{y,y'}$ 的同倫型与 $y, y' \in Y$ 的选择无关.

因为若 y_1, y'_1 是 Y 的任意两个不同的点，由于 y 可以变形到 y_1（并且 y' 到 y'_1），Y 是弧式連通的，則 $E_{y,y'} \sim E_{y_1,y'} \sim E_{y_1,y'}$.

由这一事实，$E_{y,y'}$ 的同調以及同伦羣都互相同构，并且特别地同构于 Z_y 的同調和同伦羣. 应該注意到 Z_y 是弧式連通的当而且只当 Y 是单連通的. 我們固定一个基点 $y_0 \in Y$ 并且把 Z_{y_0} 写作

1) 两个映象的和如第二章中所定义.

Z. 于是我們得到一个伪纖維空間 $E_{y_0, Y}$，有底空間 Y 和"纖維" Z. 我們还要注意到空間 $E_{y_0, Y}$，是可縮的，因而有零的同調羣和同伦羣. 应用同伦序列只能給出显然的結果：$\pi_n(Z) \approx \pi_{n+1}(Y)$. 不过，知道 Y 的同調羣后，是能够获得关于 Z 的同調羣的知識的.

現在設 Y 是单連通的并且設 n 大于 1. 記 $Y = Y_0$，Z_0 是 Y_0 上的閉路程空間；Y_1 是 Z_0 的万有复盖[1]；Z_1 是 Y_1 的閉路程空間；…；Y_{r+1} 是 Z_r 的万有复盖；Z_{r+1} 是 Y_{r+1} 上的閉路程空間；….

于是

$$\pi_n(Y) \approx \pi_{n-1}(Z_0) \approx \pi_{n-1}(Y_1) \approx \pi_{n-2}(Z_1) \approx \cdots \approx \pi_1(Z_{n-2}).$$

同时，由于 $\pi_n(Y)$ 是可換的，$\pi_1(Z_{n-2}) \approx H_1(Z_{n-2})$. 于是 $\pi_n(Y)$ 为一个合适的閉路程空間的 1 維同調羣所表示.

取一个空間 X 的万有复盖的步驟有着这样的有用結果："毁除" X 的基本羣，即我們代替 X 以一个空間，它有着如同 X 的相同的 2, 3, … 維同調羣，但它的基本羣是零. 我們可以推广考究万有复迭空間的运算如下.

設 X 是一个弧式連通的空間使得 $\pi_n(X) = 0$，$n = 1, \cdots, m-1$. 由附加[2]对应于 $\pi_{m+1}(X)$ 的生成元的 $(m+2)$ 維胞腔，我們可以嵌 X 入一个空間 X_1 使得 $\pi_n(X_1) = \pi_n(X)$，$n = 1, 2, \cdots, m$，$\pi_{m+1}(X_1) = 0$. 我們这时可以附加 $(m+3)$ 維胞腔于 X_1 以"毁除" $\pi_{m+2}(X_1)$，并且可以依此方法一直到得到一个空間 Y，它包含 X，并且使得 $\pi_n(Y) = 0$，$n \neq m$，$\pi_m(Y) = \pi_m(X)$. 設 E 是 Y 上的路程空間，起点在 X 內而終点为 x_0($E = E_{X, x_0}$)，并且設 $\phi: E \to X$ 是这样的映象，它使得这样的一个路程对应于它的起点. 然后，正如前面一样，E 是 X 上的伪纖維空間，有 Y 上的閉路程空間 Z 的同伦型的纖維.

定理 4.5. E 的同伦羣由

$$\pi_n(E) \approx \pi_n(X), \ n \geqslant m+1, \quad \pi_n(E) = 0, \ n < m+1$$

---

1) 我們取万有复盖以致所有的 Z_r 可以是弧式連通的.

2) 对于"附加一个胞腔到一个空間"的精确定义，可参看第六章 §2.

給出。

考慮序列

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_{n+1}} \pi_n(Z) \xrightarrow{i} \pi_n(E) \xrightarrow{\bar{j}} \pi_n(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_n} \pi_{n-1}(Z) \longrightarrow \cdots.$$

如果 $n \geqslant m+1$，则 $\pi_n(Z) = \pi_{n+1}(Y) = 0$，$\pi_{n-1}(Z) = \pi_n(Y) = 0$，并且

$$\bar{j}: \pi_n(E) \approx \pi_n(X).$$

如果 $n < m-1$，則 $\pi_n(Z) = \pi_{n-1}(Z) = 0$ 和 $\pi_n(E) \approx \pi_n(X) = 0$.

現在考虑同态 $\bar{\partial}_m: \pi_m(X) \to \pi_{m-1}(Z)$。它是如下导出的。如果 $f: I^m, \dot{I}^m \to X, x_0$ 代表 $\alpha \in \pi_m(X)$，則 $\bar{\partial}_m \alpha$ 由 $g: I^{m-1}, \dot{I}^{m-1} \to \to Z, z_0$ 代表，其中

$$(g(t_1, \cdots, t_{m-1}))(t_m) = f(t_1, \cdots, t_{m-1}, t_m),$$

并且 z_0 是在 x_0 的常值路程。于是显然有：如果 i'_m 是內射 $\pi_m(X) \to \to \pi_m(Y)$，并且 $\bar{\partial}'_m$ 是通常的同构：$\pi_m(Y) \approx \pi_{m-1}(Z)$[1]，則 $\bar{\partial}_m = = \bar{\partial}'_m i'_m$。由于 i'_m 是 $\pi_m(X)$ 到 $\pi_m(Y)$ 上的一个同构，从而 $\bar{\partial}_m$ 是 $\pi_m(X)$ 到 $\pi_{m-1}(Z)$ 上的一个同构。置 $n = m$。这时 $\pi_n(Z) = 0$，所以 $\bar{j}$ 是 $\pi_n(E)$ 到 $\pi_n(X)$ 内的一个同构，而且 $\bar{\partial}_n$ 是一个同构，所以 $\bar{j}$ 映 $\pi_n(E)$ 成零。于是 $\pi_m(E) = 0$。置 $n = m-1$。这时 $\pi_{n-1}(Z) = 0$，所以 $\bar{j}$ 映 $\pi_n(E)$ 到 $\pi_n(X)$ 上，而且 $\bar{\partial}_{n+1}$ 映 $\pi_{n+1}(X)$ 到 $\pi_n(Z)$ 上，所以 i 映 $\pi_n(Z)$ 成零并且 $\bar{j}$ 是一个同构。于是 $\bar{j}: \pi_{m-1}(E) \approx \pi_{m-1}(X) = 0$，而定理得到証明。

我們正确地証明过 $\pi_n(E)$ 和 $\pi_n(X)$ 間的同构是 $\bar{j}$，它由 $\phi: E \to \to X$ 所导出。"纖維" Z 是一个空間，它的所有的同伦羣除 $\pi_{m-1}(Z)$ 外都是零，后者同构于 $\pi_m(X)$。这样的一个空間是爱伦堡-麦克伦(Eilenberg-Maclane)[2]复合形 $K(\pi_m(X), m-1)$ 的一个几何現实。

据希立維茲同构定理，$\pi_{m+1}(E) \approx H_{m+1}(E)$。于是 $\pi_{m+1}(X) \approx$

---

1) 对于所有的 $n \geqslant 2$，自然，同构 $\bar{\partial}'_n: \pi_n(Y) \approx \pi_{n-1}(Z)$ 成立。对于 $n = 1$，如果 $\pi_0(Z)$ 解釋为 Z 的弧式連通的分支的集合，它也同样地成立，并且这时 $\bar{\partial}'_1$ 是一一对应的。它的同調羣已經被广泛的研究过。

2) 参看 Eilenberg, S. 与 Maclane, S., *Ann. Math*,. 46(1945), 480—509; 同上, 51(1950), 514—533.

$\approx H_{m+1}(E)$，所以如果我們知道了 E 的同調羣，我們便知道 $\pi_{m+1}(X)$。 如果我們重复这一由 E 出发的过程，我們便可以恆同 $\pi_{m+2}(X)$ 为某个确定的同調羣。这样我們在这里就有了一个研究空間的同伦羣的一个交替过程。不过，它們需要对伪紆維空間、底空間和“紆維”間的同調关系有一个深入的分析，而这却形成了另一本书的主題。

第六章　霍卜夫不变量和同綸映象定理

1. 霍卜夫不变量. 設 f 是 S^{2n-1} 到 S^n 上的，对于 S^{2n-1} 和 S^n 的給定的三角剖分来講的一个单純映象，并且設 p 是 S^n 的一个 n 維单純形的內点. 于是 $f^{-1}(p)$ 是 S^{2n-1} 的这一三角剖分的某一重分上的 $(n-1)$ 維鏈，并且由于 S^{2n-1} 是一个閉流形，$f^{-1}(p)$ 事实上是一个閉鏈. 这一閉鏈約束一个在这一重分上的 n 維鏈，并且由适当地重分 S^n 的已給的三角剖分，可以使得 f 在 C^n 上是单純的[1]. 于是 $f(C^n)$ 是 S^n 上的一个 n 維閉鏈，因此，如果我們記 S^n 上的基本 n 維閉鏈以同样的記号 S^n，則对于某一整数 γ 有 $f(C^n)=\gamma S^n$. 这一整数 γ 就是映象 f 的霍卜夫不变量. 它的定义最先出現在霍卜夫的論文"Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche"中，*Math. Ann.*, 104 (1931), 637—665，其中，如标題指出的，只考虑映 S^3 入 S^2 的映象，然后，更普遍的情形是在他的較近的論文"Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension"中，*Fundam. Math.*, 25 (1935), 427—440. 为了本节所述結果的許多細致的証明，我們提供讀者上面那些論文[2].

設 q 是任意的另一个点在 S^n 的一个 n 維单純形(我們可以假定它不同于含 p 的那个)內部. 我們首先注意到，γ 可以刻划作 $f(C^n)$ 复盖 q 的(代数的)重数，这也就是說，它就是相交数 $\mathscr{I}(C^n,$

---

1) 如同在第三章那样，我們同意 f 同时代表一个单純映象和它所导出的鏈映射. 如果不致引起誤会，我們并且承認 C^n 代表一个鏈以及形成它的子复合形.

2) 尽管許多論証得以由之化簡，我們却不打算給霍卜夫不变量以上同調解释；因为我們希望鼓励讀者去查閱霍卜夫原来的論文，同样我們不假定讀者已熟悉上同調理論. 关于这一解释，可参看史挺路德的"Cohomology invariants of mappings", *Ann. Math.*, 50 (1949), 954—988.

$f^{-1}(q)$). 由定义,这就是环繞数

$$\mathscr{L}(f^{-1}(p), f^{-1}(q)).$$

如果我們以 γ_p 記对于点 p 所定义的,映象 f 的霍卜夫不变量,则

$$\gamma_p = \mathscr{L}(f^{-1}(p), f^{-1}(q)).$$

現在,由一个关于环繞数的基本定理[1],我們有

$$\mathscr{L}(f^{-1}(p), f^{-1}(q)) = (-1)^n \mathscr{L}(f^{-1}(q), f^{-1}(p)).$$

因此 $\gamma_p = (-1)^n \gamma_q$. 如果 r 是 S^n 的另一个点,就会有 $\gamma_q = (-1)^n \gamma_r$, $\gamma_p = (-1)^n \gamma_r$. 于是,如果 n 是偶数,γ_p 就与 p 的选择无关;如果 n 是奇数,$\gamma_p = 0$. 这样,如果 n 是奇数则霍卜夫不变量常常是零,并且在这一节的其余部分我們限于 n 是偶数的情形.

現在設 P, Q 是 S^{2n-1} 和 S^n 的給定的三角剖分,并且設 $f: S^{2n-1} \to S^n$ 对于三角剖分 P, Q 来講是单純的. 如果 f' 对于 P, Q 的重分 P', Q' 是单純的并且对于 S^{2n-1} 在三角剖分 P' 下的每一个頂点 σ^0,

$$f(\sigma^0 \text{ 的星形}) \subset f'(\sigma^0) \text{ 的星形},$$

我們就把 f' 設作是 $f: S^{2n-1} \to S^n$ 的一个**单純逼近**. 这里的星形自然是对三角剖分 P', Q' 来取的. 霍卜夫証明了:如果 f' 是一个对于 f 的单純逼近,则有 $\gamma(f') = \gamma(f)$,然后把这一結果推广到映象 $f_1, f_2: S^{2n-1} \to S^n$,它們是同伦的并且分别对于 S^{2n-1} 的三角剖分 P_1, P_2 和 S^n 的三角剖分 Q_1, Q_2 来講是单純的,这里的 P_1, P_2 有一个公共重分而且 Q_1, Q_2 有一个公共重分. 不过,由于一般地并不知道一个球的两个三角剖分是否有一个公共重分,因而还不能肯定 γ 是同伦类的一个不变量. 为了証明这一事实,霍卜夫用到下面的两个引理,这两个引理应該互相地对照.

引理 1.1. 設 $g: S_1^{2n-1} \to S^{2n-1}$ 是一个度數为 d 的單純映象,$f: S^{2n-1} \to S^n$ 是一个單純映象. 于是 $\gamma(fg) = d\gamma(f)$.

为此設 p 是 S^n 的一个 n 維单純形 σ^n 的內点. 于是 $(fg)^{-1}(p)$ 是一些 $(n-1)$ 維环道,其中的每一个为 g 映射成 $f^{-1}(p)$ 的 $(n-1)$ 維环道. 如果 $(fg)^{-1}(p)$ 的 m_1 个 $(n-1)$ 維环道,m_2 个

1) 参看 Seifert and Threlfall 合著的"Lehrbuch der Topology", §77(有江澤涵先生的中譯本,商务版).

$(n-2)$ 維环道分别由 g 正向地和負向地映射成 $f^{-1}(p)$ 的一个特殊的 $(n-1)$ 維环道，則 $m_1-m_2=d$，因此，当把 f 与 g 看作是鏈映射，有 $g((fg)^{-1}(p))=\alpha(f^{-1}(p))$．設 $(fg)^{-1}(p)$ 約束 C_1^n 于 S_1^{2n-1} 內而 $f^{-1}(p)$ 約束 C^n 于 S^{2n-1} 內．于是[1] $g(C_1^n)-dC^n$ 是 S^{2n-1} 上的一个 n 維閉鏈，因而是一个边緣 n 維閉鏈．从而 $fg(C_1^n)-df(C^n)$ 是 S^n 上的一个边緣 n 維閉鏈，因而就是零．所以 $\gamma(fg)=$ $=d\gamma(f)$．

引理 1.2. 設 $g:S^n\to S_1^n$ 是一个度數为 d 的單純映象，$f:S^{2n-1}\to S^n$ 是一个單純映象．于是 $\gamma(gf)=d^2\gamma(f)$．

为此設 p 是 S_1^n 的一个 n 維单純形的內点．然后 m_1 个单純形 $\sigma_1^n,\cdots,\sigma_{m_1}^n$ 被 g 正向地映射成 σ^n，m_2 个单純形 $\sigma_{m_1+1}^n,\cdots,\sigma_{m_1+m_2}^n$ 被 g 負向地映射成 σ^n，其中 $m_1-m_2=d$．設 p_i 是 σ_i^n 的被 g 映射成 p 的內点，$i=1,\cdots,m_1+m_2$．考慮定向，然后 $(gf)^{-1}(p)=$ $=\sum_{i=1}^{m_1}f^{-1}(p_i)-\sum_{j=1}^{m_2}f^{-1}(p_{m_1+j})$．設 C_i^n 是 S^{2n-1} 上的一个鏈，由 $f^{-1}(p_i)$ 所約束，$i=1,\cdots,m_1+m_2$．然后 $\sum_{i=1}^{m_1}C_i^n-\sum_{j=1}^{m_2}C_{m_1+j}^n$ 由 $(gf)^{-1}(p)$ 所約束，所以

$$\gamma(gf)S_1^n=gf\left(\sum_{i=1}^{m_1}C_i^n-\sum_{j=1}^{m_2}C_{m_1+j}^n\right)=g((m_1-m_2)\gamma(f)S^n)=$$
$$=g(d\gamma(f)S^n)=d^2\gamma(f)S_1^n,$$

而引理得以証明．

定理 1.3. γ 是映象 $S^{2n-1}\to S^n$ 的同伦类的一个不变量．

現在設 P,Q 是 S^{2n-1},S^n 的三角剖分并且設 $\{P\},\{Q\}$ 各自为由 P,Q 的所有重分組成的三角剖分系．給定任意的映象 $f:S^{2n-1}\to S^n$，我們可以定义 $\gamma_{P,Q}(f)$ 为同伦于 f 的且对于某一 $p'\in\{P\}$，$Q'\in\{Q\}$ 是单純的[2]任意一个映象 $f':S^{2n-1}\to S_n$ 的霍卜夫不变量．

---

1) 我們重分 S_1^{2n-1},S^{2n-1},S^n 的已給的三角剖分，以致 g 在 C_1^n 上和 f 在 C^n 上都是单純的．一个类似的注解将应用于引理 1.2 的証明中．

2) $\gamma_{P,Q}(f)$ 定义的唯一性来自引理 1.1 的前面一段中．

如果我們能示明

$$\gamma_{P,Q}(f) = \gamma_{P_1,Q_1}(f)$$

对于任意另外的三角剖分系 $\{P_1\}$,$\{Q_1\}$ 成立,定理就得到証明. 我們首先証明 $\gamma_{P,Q}(f) = \gamma_{P_1,Q}(f)$. 我們来三角剖分 S_1^{2n-1} 为 P_1 并且設 $g: S_1^{2n-1} \to S^{2n-1}$ 是度数为 d 的任意映象, $f: S^{2n-1} \to S^n$ 是任意的映象. 然后 $f \sim f'$, 其中 f' 分别对于三角剖分 $p' \in \{P\}$, S^{2n-1} 的 Q 以及 S^n 是单純的,并且 $g \sim g': S_1^{2n-1} \to S^{2n-1}$, 其中 g' 分别对于三角剖分 $P_1' \in \{P_1\}$, S_1^{2n-1} 的 P' 以及 S^{2n-1} 是单純的. 于是 $\gamma_{P_1,Q}(fg) = = \gamma(f'g') = d\gamma(f')$, 由引理 1.1, $= d\gamma_{P,Q}(f)$.

現在設 S_1^{2n-1}, S^{2n-1} 是同一个 $(2n-1)$ 維球的两个模本, S_1^{2n-1} 上給定有三角剖分 P_1 而 S^{2n-1} 上給定有三角剖分 P. 設映象 $g: S_1^{2n-1} \to S^{2n-1}$ 是把 S_1^{2n-1} 和 S^{2n-1} 中对应于 $(2n-1)$ 維球的同一点的那些点配应起来. 于是 g 是一个同胚映象, 如果我們适当地定向 S_1^{2n-1}, S^{2n-1}, 且有度数 $+1$. 当把 f 看作是伴应着三角剖分 P_1 而不是 P 时,这时映象 $fg: S_1^{2n-1} \to S^n$ 就正是映象 f. 因此

$$\gamma_{P_1,Q}(f) = \gamma_{P_1,Q}(fg) = \gamma_{P,Q}(f),$$

完成了証明的前一半. 应用引理 1.2 代替引理 1.1, $\gamma_{P_1,Q}(f) = = \gamma_{P_1,Q_1}(f)$ 的証明可以在类似的方法下得出. 我們就略去这一詳細的論述.

当对于任意的映象 $f: S^{2n-1} \to S^n$ 定义了 $\gamma(f)$ 之后, 我們可以重述引理 1.1 和 1.2 如下.

引理 1.1*. 設 $g: S_1^{2n-1} \to S^{2n-1}$ 是一个度數为 d 的映象, 並且 $f: S^{2n-1} \to S^n$ 是任意的映象. 于是 $\gamma(fg) = d\gamma(f)$.

引理 1.2*. 設 $g: S^n \to S_1^n$ 是一个度數为 d 的映象, 並且 $f: S^{2n-1} \to S^n$ 是任意的映象. 于是 $\gamma(fg) = d\gamma(f)$.

系 1.4. $f: S^{2n-1} \to S^n$ 的霍卜夫不变量不受 S^n 定向改变的影响;如果 S^{2n-1} 的定向逆轉,它就应乘以 -1.

定理 1.5. 設 $f: S^{2n-1}, p_0 \to S^n, p_0$ 代表[1] $\alpha \in \pi_{2n-1}(S^n)$, 則

1) 如果 $n < r$, 我們常可以假定 $S^n \subset S^r$, 这时把 $(n+1)$ 維欧氏空間認作是由 $(r+1)$ 維空間中的前 $(n+1)$ 个坐标所生成的空間.

$\alpha\to\gamma(f)$ 定义了 $\pi_{2n-1}(S^n)$ 到整數加羣內的一个同态.

現在設 $\alpha,\beta\in\pi_{2n-1}(S^n)$并且选择 f,g 代表 α,β 使得:(i) f,g 分別对于 S^{2n-1},S^n 的某一三角剖分是单純的; (ii) $f(E_-^{2n-1})=g(E_+^{2n-1})=p_0$, 其中 E_+^{2n-1}, E_-^{2n-1} 是 S^{2n-1} 的北、南半球; (iii) p_0 是 S^n 的一个頂点, $p_0=(1,0,\cdots,0)$. 于是由 $h|E_+^{2n-1}=f$, $h|E_-^{2n-1}=g$ 所給定的 $h:S^{2n-1}\to S^n$ 代表 $\alpha+\beta$ 并且是单純的.

設 q 是 S^n 的一个 n 維单純形的內点. 于是

$$h^{-1}(q)=f^{-1}(q)+g^{-1}(q).$$

由于 $f^{-1}(q)\subset E_+^{2n-1}$, 它約束 $C_+^n\subset E_+^{2n-1}$. 类似地, $g^{-1}(q)$ 約束 $C_-^{n-1}\subset E_-^{2n-1}$. 这样

$$\gamma(h)S^n=h(C_+^n+C_-^n)=f(C_+^n)+g(C_-^n)=\gamma(f)S^n+\gamma(g)S^n,$$

或者

$$\gamma(h)=\gamma(f)+\gamma(g).$$

这是很便利的,記 $\gamma(\alpha)$, $\alpha\in\pi_{2n-1}(S^n)$为类 α 中的所有 $f:S^{2n-1}\to S^n$ 的 $\gamma(f)$ 的公共值. 这样 $\gamma:\alpha\to\gamma(\alpha)$ 是 $\pi_{2n-1}(S^n)$ 到 Z 內的一个同态, Z 是整数加羣.

当 n 是奇数时我們已經看到 $\gamma(\alpha)=0$. 下面的定理确定了当 n 是偶数时 γ 是非零的.

定理 1.6. 如果 n 是偶數, $\pi_{2n-1}(S^n)$ 有一个元素的霍卜夫不变量是 2.

由系 4 足够証明存在一个元素它的霍卜夫不变量是 ± 2.

現在設 E^n 选定了一定的定向;并且設 $\phi_n:E^n,S^{n-1}\to S^n,p_0$ 是在第二章 § 2 中所定义过的那个映象,代表着 $\pi_n(S^n)$ 的正生成元. 这时由于 n 是偶数, S^{2n-1} 可以表作为 $(E^n\times E^n)^{\cdot}$, 并且 $(2n-1)$ 維基本閉鏈这时就是 $\dot{E}^n\times E^n+E^n\times\dot{E}^n$. 考虑由 $f(x,y)=\phi_n(x)$, $y\in\dot{E}^n$, $=\phi_n(y)$, $x\in\dot{E}^n$ 所給定的映象 $f:S^{2n-1}\to S^n$. 我們可以假定 f 和 ϕ_n 是单純的, 并且再次認定 ϕ_n 是 E^n 的內部中的同胚映象. 然后,如果 q 是在 S^n 的一个 n 維单維形的內部,則除非对于定向的一个变更,閉鏈 $f^{-1}(q)$ 就是 $\dot{E}^n\times p+p\times\dot{E}^n$, 这里 $\phi_n(p)=q$. 設 p_1 是 $\dot{E}^n$ 的任意一个頂点, 并且設 C' 是由 $p-p_1$ 所約束

的 E^n 的一个剖分上的一个鏈. 然后 $\dot{E}^n \times p + p \times \dot{E}^n$ 就約束 $E^n \times p_1 - \dot{E}^n \times C^1 + p_1 \times E^n + C^1 \times \dot{E}^n$. 由于 $n > 1$

$$f(\dot{E}^n \times C^1) \text{ 和 } f(C^1 \times \dot{E}^n)$$

作为 S^n 的 n 維鏈是零,因此

$$f|(E^n \times p_1 + \dot{E}^n \times C^1 + p_1 \times E^n + C^1 \times \dot{E}^n)$$

的度数是 2 (由于 $f(E^n \times p_1) = f(p_1 \times E^n) = \phi_n(E^n) = S^n$).

在本定理的証明中所描述的这个元素是一个"威脫海特积"的一个特例,"威脫海特积"的定义将在本章以后于一个更普遍些的情形中叙述.

系 1.7. 如果 n 是偶数, $\pi_{2n-1}(S^n)$ 含有一个无限阶循环子羣.

上面所說到的子羣是由定理 1.6 中所描述过的那个元素生成. 当 $n = 2, 4$ 或 8, 系 1.7 在第五章中巳經証明过. 不管怎样,这里所描述的映象 ($S^3 \to S^2$, $S^7 \to S^4$, $S^{15} \to S^8$) 都具有霍卜夫不变量 ± 1 (依照定向而定). 这是从 S^3 上任意两个大圓具有环繞数 ± 1 这一事实而来,并且类似地对于 S^7 上的大 3 維球和 S^{15} 上的大 7 維球. 于是 $\pi_3(S^2)$ 到 $\pi_3(S^3)$ 上, $\pi_7(S^4)$ 到 $\pi_7(S^7)$ 上,以及 $\pi_{15}(S^8)$ 到 $\pi_{15}(S^{15})$ 上的投射可以恆同于同态映象 γ.

应該注意到,对照于勃劳威度数, 我們并沒断言:如果两个映象 $S^{2n-1} \to S^n$ 有相同的霍卜夫不变量則它們是同伦的. 当 $n = 2$ 时,由于 $\pi_3(S^2) = Z_\infty$, 这种情形是会发生的; 但如果 $n = 4$ 或 8 时就不是这样了. 作为一个例子,这里有一个奇特的結果:如果在任意的映象 $S^3 \to S^2$ 之后随以对径映象 $S^2 \to S^2$, 則复合映象同伦于原来的映象.

引出問題:是否可能推广霍卜夫不变量. 它为 G. W. 威脫海特首先完成,他定义了一个同态 $H: \pi_r(S^n) \to \pi_r(S^{2n-1})$, $r < 3n-3$ (以后为布拉克斯 (Blakers) 和麦賽扩充到 $r \leqslant 3n - 3$). 如果 $r = 2n - 1$, 則 H 是 $\pi_{2n-1}(S^n)$ 到 $\pi_{2n-1}(S^{2n-1})$ 內的一个同态, 且如果 $\pi_{2n-1}(S^{2n-1})$ 中的每一个类恆同于它的特征度数, 則該同态变为到整数加羣內的一个同态. 这以后, 作者定义了一个同态映象

$H^*: \pi_r(S^n) \to \pi_{r+1}(S^{2n})$，对于所有的 r，n 均真，它当 $r \leqslant 3n-3$ 在本質上等价于（这一意义于下节内可予以精确）G. W. 威脱海特的 H。

設 $\mu: \pi_r(S^n) \to \pi_r(S^n \cup S^n)$ 是由映象 $S^n \to S^n \cup S^n$（$S^n \cup S^n$ 是具有一个公共点的两个球的并集）导出的同态，这一映象把一个赤道 $S^{n-1} \subset S^n$ 变成一个点．据第四章定理 6.2，这时

$$\pi_r(S^n \cup S^n) \approx \pi_r(S^n) + \pi_r(S^n) + \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \cup S^n),$$

其中 $\pi_r(S^n \cup S^n)$ 到它的直接和上的投影[1]是明显地定义了．設 Q 是投射

$$\pi_r(S^n \cup S^n) \to \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \cup S^n).$$

最后，設 $\chi: \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \cup S^n) \to \pi_{r+1}(S^{2n})$ 是由把 $S^n \cup S^n$ 收縮成一点导出．然后我們定义

$$H^*: \pi_r(S^n) \to \pi_{r+1}(S^{2n}) \text{ 为 } H^* = \chi Q \mu.$$

証明 H^* 将会推广霍卜夫不变量乃是本章的目的之一．

2. 弗洛坦斯尔同緯映象和它的推广． 設 f 是一个映象 $S^{r-1} \to S^{n-1}$；我們可以把 S^{r-1}，S^{n-1} 分别看作为 S^r 和 S^n 的赤道，并且扩张 f 成一个映象 $f': S^r \to S^n$，它变换 S^r 的北半球入 S^n 的北半球，同时变换 S^r 的南半球入 S^n 的南半球．f' 的同伦类不依賴于 f 的扩张的选择，而在事实上，它显然地只依賴于 f 的同伦类．这样就得到一个映射

$$F: \pi_{r-1}(S^{n-1}) \to \pi_r(S^n).$$

映象 f' 称作为 f 的同緯映象；如果 $\alpha \in \pi_{r-1}(S^{n-1})$，且称 $F(\alpha)$ 为 α 的同緯映象．

定理 2.1． F 是一个同态．

我們直接地予以証明．同态

$$d: \pi_r(E^n_+, S^{n-1}) \to \pi_{r-1}(S^{n-1})$$

是一个到 $\pi_{r-1}(S^{n-1})$ 上的同构．事实上，如果 $f: S^{r-1} \to S^{n-1}$ 代表 $\alpha \in \pi_{r-1}(S^{n-1})$，則 $d^{-1}(\alpha)$ 由 $f' | E^r_+$ 代表，其中 E^r_+ 是 S^r 的北半球．

---

1) 同时参看本章 §4．应注意到这里所用到的記号并不与第四章 §6 中的相同．

設

$$\phi_n: E^n_+, S^{n-1} \to S^n, p_0$$

导出 $\phi: \pi_r(E^n_+, S^{n-1}) \to \pi_r(S^n)$. 然后 $\phi_n f' | E^r_+$ 代表 $\phi d^{-1}(\alpha)$. 由定义 $\phi_n f'(E^r_-) = p_0$ 我們可以扩张 $\phi_n f' | E^r_+$ 到 S^r 上. 由第三章定理 2.5, 扩张了的映象仍然代表着 $\phi d^{-1}(\alpha)$ 并且与 $\bar{\phi}_n f'$ 重合. 由于 $\bar{\phi}_n \sim 1: S^n, p_0 \to S^n, p_0$, $\bar{\phi}_n f'$ 就同 f' 代表着同一个元素，即 $F(\alpha)$. 于是 $F = \phi d^{-1}$ 而 F 是一个同态.

应該注意到同构 ϕ 等于 $j^{-1}i$, 其中 i 是內射 $\pi_r(E^n_+, S^{n-1}) \to \pi_r(S^n, E^n_-)$, 并且 j 是內射 $\pi_r(S^n) \to \pi_r(S^n, E^n_-)$, 它是一个到 $\pi_r(S^n, E^n_-)$ 上的同构，因为 E^n_- 可以在自身上縮成一点 p_0. 这只需观察到 $\bar{\phi}_n$ 导出 $j^{-1}: \pi_r(S^n, E^n_-) \to \pi_r(S^n, p_0)$. 于是 $F = \phi d^{-1} = j^{-1} i d^{-1}$, 而 F 的性态可以求之于 i 的.

設 X 是一个弧式連通的豪斯道夫空間并且設 e^n 是一个（开）n 維胞腔，即一个 n 維元体內部的同胚象，e^n 与 X 不相交. 我們把 $X \cup e^n$ 轉化成一个拓扑空間，由把 X 当作 $X \cup e^n$ 的一个閉子集，并且定义 e^n 的閉包是 n 維元体 E^n 在一个变换 $f: E^n, S^{n-1} \to X \cup e^n, X$ 之下的象，这一变换使得 $f | E^n - S^{n-1}$ 是到 e^n 上的一个拓扑变换. 映象 f 称作为对于 e^n 的一个**特征映象**，而 $f | S^{n-1}$ 是对于 e^n 的一个**附加映象**. 关于这些基本概念，我們将給出下面的例子:

(A) E^n 本身是由附加开 n 維胞腔 $(E^n - S^{n-1})$ 到 S^{n-1} 得到.

(B) 設 e^2 由一个度数为 2 的映象 $f: S^1 \to S^1$ 附加到 S^1. 于是 $S^1 \cup e^2$ 具有射影平面的同伦型.

(C) 設 $f: E^n \times E^n \to S^n \times S^n$ 由

$$f(x, y) = (\phi_n(x), \phi_n(y))$$

給定. 然后 $f((E^n \times E^n)^\cdot) \subset S^n \cup S^n$. 于是 f 是一个映象

$$E^n \times E^n, (E^n \times E^n)^\cdot \to S^n \times S^n, S^n \cup S^n,$$

并且由 ϕ_n 的定义就有

$$f | (E^n \times E^n - (E^n \times E^n)^\cdot)$$

是一个到 $S^n \times S^n - (S^n \cup S^n)$ 上的同胚映象. 这样，把 $E^n \times E^n$ 与一个 $2n$ 維元体恆同看待，我們就可以說 $S^n \times S^n$ 是从附加一个 $2n$

維胞腔到 $S^n \cup S^n$ 形成．映象 f 就是一个特征映象，而 $f|(E^n \times E^n)$ 是一个附加映象．

(D) S^n 是由附加开 n 維胞腔 $(E^n_+ - S^{n-1})$ 到 E^n_- 形成．

(E) S^n 是由附加开 n 維胞腔 $S^n - p_0$ 到 p_0 形成． 于是 ϕ_n 是一个特征映象．

例 (D) 示明了附加胞腔到空間的概念对于同綠映象概念的关系．在恆等映象的情形中，同态 $i: \pi_r(E^n_+, S^{n-1}) \to \pi_r(S^n, p_0)$ 可以認为是[1]由对于胞腔 $E^n_+ - S^{n-1}$ 的特征映象所导出．一般地講，設 $X^* = X \cup e^n$ 并且設特征映象 $f: E^n, S^{n-1} \to X^*, X$ 导出同态 $g_r: \pi_r(E^n, S^{n-1}) \to \pi_r(X^*, X)$． 同态 g_r (被 J. H. C. 威脫海特) 称作为 (广义) "同綠同态"．我們重新提及在同伦边緣同态下，$\pi_r(E^n, S^{n-1}) \approx \pi_{r-1}(S^{n-1})$．

設 $\chi_r: \pi_r(X^*, X) \to \pi_r(S^n)$ 是由把 X 縮成一点[2]而导出的． 然后 $\chi_r g_r: \pi_r(E^n, S^{n-1}) \to \pi_r(S^n)$ 就由这样的一个映象导出，它在 $E^n - S^{n-1}$ 內是一个同胚映象 (并且保持定向)，且映 S^{n-1} 成一个点． 这样的一个映象同伦于 ϕ_n，所以 $\chi_r g_r d^{-1}$ 就是这同綠映象 $F: \pi_{r-1}(S^{n-1}) \to \pi_r(S^n)$ 我們列出关系式

$$F_{r-1} = \chi_r g_r d^{-1}$$

作为将来的参考，用 F_{r-1} 来記 $F: \pi_{r-1}(S^{n-1}) \to \pi_r(S^n)$．

我們現在来証明一些关于同綠映象的初等定理．

定理 2.3. 如果 $\alpha \in F\pi_{r-1}(S^{n-1})$，$\beta_1, \beta_2 \in \pi_n(X)$，則

$$(\beta_1 + \beta_2) \circ \alpha = \beta_1 \circ \alpha + \beta_2 \circ \alpha.$$

这里的 $\beta \circ \alpha$，$\alpha \in \pi_r(S^n)$，$\beta \in \pi_n(X)$ 是 $\pi_r(X)$ 的由 $gf: S^r \to X$ 所代表的元素，其中的 $f: S^r \to S^n$ 代表 α，$g: S^n \to X$ 代表 β． 以映

1) Eilenberg 已經注意到同綠映象对于"內挖"的关系，因为 (E^-_n, S^{n-1}) 是从 (S^n, E^n_+) 內挖去 $E^n_+ - S^{n-1}$ 得到的． 內挖公理对于同伦羣的失效就严格地区别了同調和同伦理論 (参看 Eilenberg and Steenrod, "Axiomatic approach to homology theorey", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, Wash., 31 (1945), 117—120)．

2) 設 $g: E^n, S^{n-1} \to S^n, p_0$ 是 $E^n - S^{n-1}$ 到 $S^n - p_0$ 上的任意一个順向同态． 这时一个收縮映象

$$h: X^*, X \to S^n, p_0$$

就由 $h(x) = p_0$，$x \in X$，$h|\bar{e}^n = gf^{-1}$ 給定，f 是对于 e^n 的特征映象．

E^r_+ 到 E^n_+ 而 E^r_- 到 E^n_- 的 $f: S^r \to S^n$ 代表 $\alpha \in F\pi_{r-1}(S^{n-1})$，并且以使得 $g_1(E^n_-) = g_2(E^n_+) = x_0$ 的 $g_1, g_2: S^n \to X$ 代表 $\beta_1, \beta_2 \in \pi_n(X)$，这里的 x_0 是在 X 内的基点。然后設 $g: S^n \to X$ 由 $g|E^n_+ = g_1$, $g|E^n_- = g_2$ 所定义。映象 g 代表 $\beta_1 + \beta_2$，所以 gf 代表 $(\beta_1 + \beta_2)\circ\alpha$。同时，$g_1f$，$g_2f$ 各自代表 $\beta_1\circ\alpha$，$\beta_2\circ\alpha$。现在 $gf|E^r_+ = g_1f|E^r_+$，$gf|E^r_- = g_2f|E^r_-$ 并且 $g_1f(E^r_-) = g_2f(E^r_+) = x_0$。这样 gf 代表 $\beta_1\circ\alpha + \beta_2\circ\alpha$ 而定理得到証明。

我們也可以把定理的結論表作为：如果 α 是一个同緯映象元素(即 $F\pi_{r-1}(S^{n-1})$ 中的一个元素)，则"左分配律"成立。至于"右分配律" $\beta\circ(\alpha_1 + \alpha_2) = \beta\circ\alpha_1 + \beta\circ\alpha_2$ ($\beta \in \pi_n(X)$，$\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_r(S^n)$) 成立是定义的一个直接結果，并且也正是一个映 X 入 Y 的映象导出一个 $\pi_r(X)$ 入 $\pi_r(Y)$ 的同态这一事实的一个特殊情形。我們可以証明，如果 $\alpha \in \pi_r(S^n)$ 不是一个同緯映象元素，则"左分配律"不必成立。因为設 $\alpha \in \pi_3(S^2)$，$\alpha \neq 0$，并且設 $1, -1 \in \pi_2(S^2)$，则 $(1-1)\circ\alpha = 0$，但 $(-1)\circ\alpha = \alpha$，所以

$$(-1)\circ\alpha + 1\circ\alpha = 2\alpha \neq 0,$$

并且

$$(1-1)\circ\alpha \neq 1\circ\alpha + (-1)\circ\alpha.$$

另一方面，我們可以有 $(\beta_1 + \beta_2)\circ\alpha = \beta_1\circ\alpha + \beta_2\circ\alpha$，其中 $\beta_1 \neq 0$，$\beta_2 \neq 0 \in \pi_n(X)$ 并且 $\alpha(\in \pi_r(S^n))$ 不是一个同緯映象元素[1]。

定理 2.4. 如果 $f: E^{r+1}, S^r \to E^{n+1}, S^n$ 代表 $d^{-1}(\alpha)$，$\alpha \in \pi_r(S^n)$，其中 d 是边緣同构

$$\pi_{r+1}(E^{n+1}, S^n) \approx \pi_r(S^n),$$

且如果 $g: E^{n+1}, S^n \to X, x_0$ 代表 $\beta \in \pi_{n+1}(X)$，则

$$gf: E^{r+1}, S^r \to X, x_0$$

代表 $\beta\circ F\alpha \in \pi_{r+1}(X)$。

因为我們可以代替 E^{r+1}，E^{n+1} 为 E^{r+1}_+，E^{n+1}_+ 而由映射 E^{r+1}_- 入 E^{n+1}_- 扩张 f 成 $f': S^{r+1} \to S^{n+1}$，并且由映射 E^{n+1}_- 成 x_0 扩张

1) 这种情形发生于 $r = 6$，$n = 3$ 并且 α 是 $\pi_6(S^3)$ 中阶数为 3 的一个元素时。我們知道 $\pi_6(S^3)$ 是阶数 12 的循环群。

g 成 $g':S^{n+1}\to X$. 然后 $g'f'$ 代表着同于 gf 所代表的同一个元素，g' 代表着同于 g 所代表的同一个元素，即 β，并且 f' 代表 $F\alpha$. 这样 $g'f'$，从而 gf，代表 $\beta\circ F\alpha$.

定理 2.5. $F(\alpha\circ\beta)=F\alpha\circ F\beta,\ \alpha\in\pi_p(S^n),\ \beta\in\pi_r(S^p)$.

由这一个显然的命题就有下面的系:

系 2.6. 如果 $\alpha\in\pi_r(S^n)$，$-1\in\pi_n(S^n)$，则

$$F((-1)\circ\alpha)=-F\alpha.$$

这是因为 F 是一个同态 $F(-1)=-1\in\pi_{n+1}(S^{n+1})$. 据定理 2.3，于是 $F((-1)\circ\alpha)=F(-1)\circ F\alpha=-1\circ F\alpha=-F\alpha$.

系 2.7. $F\pi_3(S^2)$ 至多有两个元素.

設 α 生成 $\pi_3(S^2)$，则 $(-1)\circ\alpha=\alpha$; 但是

$$F(\alpha+(-1)\circ\alpha)=F\alpha-F\alpha=0;$$

于是 $F(2\alpha)=2F(\alpha)=0$，从而本系成立.

定理 2.8. 如果 $\alpha\in F\pi_{2n-2}(S^{n-1})$，则 α 的霍卜夫不变量是零.

設 $f:S^{2n-1},E_+^{2n-1},E_-^{2n-1}\to S^n,E_+^n,E_-^n$ 是一个单純映象代表着 α. 对于任意的在 E_+^n 的一个 n 維单純形内部的 p，由于 $n\geqslant 2$，$f^{-1}(p)$ 是 E_+^{2n-1} 的一个 $(n-1)$ 維閉鏈，它約束一个在 E_+^{2n-1} 内的 n 維鏈. 因此 $f(C^n)$ 的确不會复蓋 S^n，所以 α 的霍卜夫不变量是零.

我們同时可以証明:

定理 2.9. 如果 $\alpha\in F\pi_{r-1}(S^{n-1})$，则 $H^*(\alpha)=0\in\pi_{r+1}(S^{2n})$.

我們重新提到 $H^*=\chi Q\mu$

$$\mu:\pi_r(S^n)\to\pi_r(S^n\cup S^n),$$
$$Q:\pi_r(S^n\cup S^n)\to\pi_{r+1}(S^n\times S^n,S^n\cup S^n),$$
$$\chi:\pi_{r+1}(S^n\times S^n,S^n\cup S^n)\to\pi_{r+1}(S^{2n}).$$

事实上，如果 α 是一个同緯映象元素，我們将証明 $Q\mu(\alpha)=0$.

考虑由 $f|E_+^n=i_1\phi$ 所給定的映象 $f:S^n\to S_1^n\cup S_2^n$，其中的 ϕ 是第二章 §2 中的映象 ϕ_n，它現在当作是一个映象 $E_+^n\to S_1^n$，并

且 i_1 是恆等映象 $S_1^n \to S_1^n \cup S_2^n$；又 $f|E_-^n = i_2\phi'$ 有类似地定义[1]. 于是 f 是一个映象导出

$$\mu: \pi_r(S^n) \to \pi_r(S_1^n \cup S_2^n).$$

另一方面，由 f 的定义，它代表

$$(i_1 + i_2) \in \pi_n(S_1^n \cup S_2^n),$$

其中 i_λ 生成 $\pi_n(S_\lambda^n)$，它当作是 $\pi_n(S_1^n \cup S_2^n)$ 的一个子羣，$\lambda = 1,2$. 故 $\mu(\alpha) = (i_1 + i_2)\circ\alpha$. 这时如果 α 是一个同緯映象元素，从定理 2.3 就有 $(i_1 + i_2)\circ\alpha = i_1\circ\alpha + i_2\circ\alpha$. 此外，$Q$ 定义作取直接和分解

$$\pi_r(S_1^n \cup S_2^n) \approx \pi_r(S_1^n) + \pi_r(S_2^n) + \pi_{r+1}(S_1^n \times S_2^n, S_1^n \cup S_2^n)$$

并且投射 $\pi_r(S_1^n \cup S_2^n)$ 的一个元素到它的在

$$\pi_{r+1}(S_1^n \times S_2^n, S_1^n \cup S_2^n)$$

內的分量上. 由于 $i_1\circ\alpha + i_2\circ\alpha \in \pi_r(S_1^n) + \pi_r(S_2^n)$，这就有 $i_1\circ\alpha + i_2\circ\alpha$ 的投影是零，或者 $Q\bar{\mu}(\alpha) = 0$.

我們現在陈述属于弗洛坦斯尔[2] 的基本的同緯映象定理. 它們被 J. H. C. 威脫海特分作为"粗略的"和"精細的"定理.

定理 2.10（**粗略的同緯映象定理**）.

当 $r \leqslant 2n - 2$，$F: \pi_{r-1}(S^{n-1}) \to \pi_r(S^n)$ 是到 $\pi_r(S^n)$ 上的；而当 $r < 2n - 2$，是同构的.

定理的第一部分已經被 J. H. C. 威脫海特推广如下（实际上，威脫海特的定理是更广于这里所談到的）：

定理 2.11. 設 $X^* = X \cup e^n$ 並且設 $f: E^n, S^{n-1} \to X^*, X$ 是一个对于 e^n 的特征映象. 这时如果 f 导出

$$g_r: \pi_r(E^n, S^{n-1}) \to \pi_r(X^*, X),$$

而且 $\pi_s(X) = 0$，$s = 1, \cdots, k < n$ 的話，則当 $2 \leqslant r \leqslant n + k - 1$，

---

1) 这也就是說，ϕ'_n 是一个映象 $E_-^n, S^{n-1} \to S^n, p_0$，它可以取作是 $\phi_n\eta$，其中 $\eta: E_-^n \to E_+^n$ 是在 S^{n-1} 內的反射. 于是，在这一約定下，ϕ'_n 就当作是一个映象 $E_-^n \to S_2^n$ 的 ϕ'_n，而 i_2 是恆等映象 $S_2^n \to S_1^n \cup S_2^n$.

2) "同緯映象 (Suspension)" 是弗洛坦斯尔的 Einhängung 的英譯名，見于他的論文"Über die Klassen von Sphärenabbildungen I", *Comp, Math.*, 5 (1937), 299—314, 讀者应該参考此书.

g_r 是到 $\pi_r(X^*, X)$ 上的.

由于定理 2.10 断言了：当 $r \leqslant 2n-2$ 时，$i:\pi_r(E^n_+, S^{n-1}) \to \pi_r(S^n, E^n_-)$ 是到 $\pi_r(S^n, E^n_-)$ 上的，并且由于 $\pi_s(E^n_-)=0$，$s=1, \cdots, n-1$（平凡地），显然定理 2.11 推广了定理 2.10.

我們将示明，可以充份証明，在每一个类 $\alpha \in \pi_r(X^*, X)$ 中，我們可以找到一个映象 $q: E^r, S^{r-1} \to X^*, X$ 使得对于某一 $x \in e^n$，$q^{-1}(x)$ 是空集或者是单独的一个点. 設 $f^{-1}(x)=y \in E^n$，則 E^n-y 的一个到 S^{n-1} 上的形变导出 X^*-x 的一个到 X 上的形变. 这就意味着內射

$$i:\pi_r(X^*, X) \to \pi_r(X^*, X^*-x)$$

是一个同构（在上的）. 如果 $q^{-1}(x)$ 是空的，$i\alpha=0$，因此 $\alpha=0$. 假定这时 $q^{-1}(x)=z$，z 是 E^r 內部的一个点. 設 U 是 x 在 e^n 內的一个邻域. 然后存在 z 的一个邻域 V，落于 E^r 的內部且使得 $q(\bar{V}) \subset U$. E^r 到 $\bar{V}$ 上的一个形变收縮引起 q 的一个同伦，在这一同伦下 S^{r-1} 不通过 x. 这就意味着 $i\alpha(\in\pi_r(X^*, X^*-x))$ 可以由这样一个映象 q' 代表，它具有性質 $q'E^r \subset U$. 于是 $f^{-1}q'$ 是一个映象

$$E^r, S^{r-1} \to E^n, E^n-y,$$

并且 $f(f^{-1}q')=q'$. 这样 $i\alpha$ 落于 $h_r\pi_r(E^n, E^n-y)$ 內，其中

$$h_r:\pi_r(E^n, E^n-y) \to \pi_r(X^*, X^*-x)$$

由 f 导出. 如果 j 是內射同构

$$\pi_r(E^n, S^{n-1}) \approx \pi_r(E^n, E^n-y),$$

这时显然有 $h_r j = i g_r$，所以

$$i\alpha = h_r\beta, \quad \beta \in \pi_r(E^n, E^n-y), = h_r j\gamma,$$

$$\gamma \in \pi_r(E^n, S^{n-1}), = i g_r\gamma,$$

并且，由于 i 是同构的，$\alpha = g_r\gamma$，所以 g_r 是在上的.

在定理的条件下，对于每一个类 $\in \pi_r(X^*, X)$ 可以由一个具有所希望的性質的映象来代表的証明，可在 J. H. C. Whitehead[1]，

---

1) 于这篇論文中懷脫海特还証明了一个定理，就重要性而言，它較弱于我們的定理 2.12.

"A note on suspension", *Quart. J. Math.* (Oxford, 1950), pp. 9—22 中找到。

关于定理 2.10 的第二部分的証明，讀者可以參看威脫海特的論文或者弗洛坦斯尔原来的論文。

定理 2.12. 如果 g_r 是如同在定理 2.11 中那样定义，則当 $F:\pi_{r-1}(S^{n-1})\to\pi_r(S^n)$ 是一个同构(在內)时

$$g_r:\pi_r(E^n, S^{n-1})\to\pi_r(X^*, X)$$

是同构(在內)。如果 F 还是到 $\pi_r(S^n)$ 上的(例如，当 $r<2n-2$)，則 g_r 是到 $\pi_r(X^*,X)$ 的一个直接加項上。

因为由(2.2)，对于所有 $\alpha\in\pi_r(E^n,S^{n-1})$，有 $\chi_r g_r(\alpha)=Fd(\alpha)$。由于 d 是一个同构(在上)，因此当 F 是同构时 $\chi_r g_r$ 是同构。如果 $\chi_r g_r$ 是同构，g_r 显然地是同构，而定理的第一部分得出。这第二部分看作是下面的代数引理的一个直接結果。

引理 2.13. 設 G, H, K 是三个交換羣並且設 $\lambda:G\to H$，$\mu:H\to K$ 是一些同态使得 $\mu\lambda:G\approx K$，則 λ 是一个同构(在內)，並且 $H=\lambda G+\mu^{-1}(0)$。

为此設 $h\in H$。这时 $\mu h\in K$，所以 $\mu h=\mu\lambda g$ 对于某一 $g\in G$ 成立。于是 $h=\lambda g+h_0$, $h_0\in\mu^{-1}(0)$。現在設 $\lambda g+h_0=0$, $g\in G$, $h_0\in\mu^{-1}(0)$。然后 $\mu\lambda g=\mu(\lambda g+h_0)=0$，所以 $g=0$，从而 λ 是同构，且同时 $h_0=0$。

在定理 2.12 的术語下就应該有

$$\pi_r(X^*,X)=g_r\pi_r(E^n, S^{n-1})+\chi_r^{-1}(0).$$

定理 2.11 和 2.12 的一个重要的結果是[1]:

定理 2.14. 如果 g_r 如同在定理 2.11 中那样定义，並且 $\pi_s(X)=0$, $s=1, 2, \cdots, k<n-1$，則

$$g_r:\pi_r(E^n, S^{n-1})\approx\pi_r(X^*,X),\quad r=2,\cdots,n+k-1.$$

設 $[i_n, i_n]\in\pi_{2n-1}(S^n)$ 是在定理 1.6 的証明中所描述过的"威脫海特积"元素。这时"精細"的同緯映象定理就如下:

1) 这一定理应与 Whitehead 的"A note on suspension"中的定理作比較(參看前面的脚注及有关文献)。

定理 2.15（**精細的同縴映象定理**）．设 $\pi_{2n-1}(S^n)_0$ 代表 $\pi_{2n-1}(S^n)$ 的由具有霍卜夫不变量 0 的元素所組成的子羣．于是 (i) $F\pi_{2n-2}(S^{n-1})=\pi_{2n-1}(S^n)_0$；(ii) $F:\pi_{2n-1}(S^n)\to\pi_{2n}(S^{n+1})$ 的核是由 $[i_n,i_n]$ 生成的循环羣；$[i_n,i_n]$ 当 n 是偶數时有霍卜夫不变量 ± 2，所以 F 的核是无限循环羣；如果 n 是奇數，則 $[i_n,i_n]$ 为 0 或階是 2，依照着 $\pi_{2n+1}(S^n)$ 有或者沒有一个元素具有霍卜夫不变量 1 而定．

本定理 (ii) 的那一部分是弗洛坦斯尔原来的結果的一个强化的形式．弗洛坦斯尔証明了：当 n 是偶数时，$F:\pi_{2n-1}(S^n)\to\pi_{2n}(S^{n+1})$ 在 $\pi_{2n-1}(S^n)$ 的子羣 $\pi_{2n-1}(S^n)_0$ 上是同构的并且有一个核，它的所有元素都具有偶数的霍卜夫不变量；并且，当 n 是奇数时，如果 $\pi_{2n+1}(S^{n+1})$ 有一个元素具有霍卜夫不变量 1，則

$$F:\pi_{2n-1}(S^n)\to\pi_{2n}(S^{n+1})$$

是同构的．这样就足够推論出：

定理 2.16. $\pi_{n+1}(S^n)$，$(n\geqslant 3)$ 是由 $F^{n-2}(\alpha)$ 生成的二階循環羣，其中 F^{n-2} 是 $(n-2)$ 重同縴映象並且 $\alpha\in\pi_3(S^2)$ 是霍卜夫映象类．

据定理 2.10

$$\pi_4(S^3)=F\pi_3(S^2),$$

并且

$$\pi_4(S^3)\approx\pi_5(S^4)\approx\cdots\approx\pi_{n+1}(S^n)\approx\cdots.$$

据系 2.7，$\pi_4(S^3)$ 至多有两个元素，并且据定理 2.15，由于 α 有霍卜夫不变量 1，$F(\alpha)\neq 0$．

系 2.17. $\pi_4(S^2)$ 是由 $\alpha\circ F(\alpha)$ 生成的 2 階循环羣．

这由第五章定理 2.1 立即得出．

现在由定理 2.15 得出 $\pi_5(S^3)$ 是 $\pi_4(S^2)$ 在 F 下的同态象，并且屡次的同縴映象給出同构

$$\pi_5(S^3)\approx\pi_6(S^4)\approx\cdots\approx\pi_{n+2}(S^n)\approx\cdots,$$

因为 $\pi_7(S^4)$ 有一个元素具有霍卜夫不变量 1．事实上，G. W. 威

脫海特[1]已經証明了 $\pi_{n+2}(S^n)$, $n\geqslant 2$ 是由 $F^{n-2}(\alpha)\circ F^{n-1}(\alpha)$ 生成的 2 阶循环羣. 不过,在現阶段,我們还不能对 G. W. 威脫海特的方法,以及更近代的嘉当和色尔 (H. Cartan 和 J.-P. Serre) 的計算球上的較高維同伦羣的方法作一些討論. 我們把一些可以从同緯映象定理和前面某些結果抽出的結論集中到一个定理.

定理 2.18. (i) $\pi_{n+2}(S^n)=0$ 或 Z_2, $n\geqslant 3$; (ii) $\pi_{n+3}(S^n)$, 是常數[2],並且不为零, $n\geqslant 5$; (iii) $\pi_{n+7}(S^n)$ 是常數, 並且不为零, $n\geqslant 9$; (iv) $\pi_8(S^4)$, $\pi_{10}(S^4)$, $\pi_{16}(S^8)$, $\pi_{18}(S^8)$ 和 $\pi_{22}(S^8)$ 不为零.

(ii) 和 (iii) 两部分由定理 2.15 以及 $\pi_7(S^4)$ 和 $\pi_{15}(S^8)$ 有具有霍卜夫不变量 1 的元素这一事实得出. (iv) 这一部分由定理 2.3 和第五章定理 2.10 以及 (ii) 和 (iii) 两部分得出.

我們可以展示一个映象 $S^n\to S^{n-1}$ 代表 $\pi_n(S^{n-1})$, $(n\geqslant 3)$ 的一个生成元. 設 S^{n-1} 是点适合于 $y_1^2+\cdots+y_n^2=1$ 的点 $(y_1,\cdots,y_n)$ 所組成的空間,并且設 S^n 是适合于 $x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=1$ 的点 $(x_1,\cdots,x_{n+1})$ 所組成的空間. 这时,这样的一个映象就給定为

$$y_1=2|\xi|x_1,\cdots,y_{n-3}=2|\xi|x_{n-3},\ \eta=2\xi\zeta,\ y_n=1-2|\xi|^2,$$

其中

$$\xi=x_n+ix_{n+1},\quad \eta=y_{n-2}+iy_{n-1},\quad \zeta=x_{n-2}+ix_{n-1},\quad i=\sqrt{-1}.$$

我們已經看到,对于在 $\pi_{2n-1}(S^n)$中, n 是偶数,是否存在一个霍卜夫不变量为 1 的元素一事是頗为重要的. G. W. 威脫海特証明了当 $n=4m+2$, $m\geqslant 1$ 就不会是这种情形,最近以来[3], 阿譚姆已經証明了,如果这样的元素存在,则 $n=2^k$.

3. 在纖維空間上的应用. 許我們来考虑第五章定理 2.3 的直

---

1) 參看 "on the $(n+2)$nd homotopy group of the n-sphere", *Ann. Math.*, 52 (1950), 245—247. 这一結果已經由 Понтрягин 于 Доклад Акад. Наук СССР, 70 (1950), 957—959 証明过,从而校正了一个較早为他所作的报告中的錯誤.

2) 現在已經知道 $\pi_{n+3}(S^n)$ 是由 $\pi_7(S^4)$ 中 Hopf 映象类的 $(n-4)$ 重同緯映象生成的 24 阶循环羣.

3) 当我写本节时, J.-P. 色尔告訴我这个属于阿譚姆的結果.

接和分解 $\pi_r(S^4)\approx\pi_r(S^7)+\pi_{r-1}(S^3)$. 我們重新指出，这一分解是当我們应用由纖維映象 $S^7\to S^4$ 所导出的同构 $\pi_r(S^7,S^3)\approx\pi_r(S^4)$ 时，从分解 $\pi_r(S^7,S^3)\approx\pi_r(S^7)+\pi_{r-1}(S^3)$ 所引起的. 現在 $\pi_{r-1}(S^3)$ 已經由一个同构嵌入 $\pi_r(S^7,S^3)$，这一同构是由在映象 $f:S^{r-1}\to S^3$ 及 f 的扩张 $f':E^r,S^{r-1}\to S^7,S^3$ 間的某一对应 $f\to f'$ 所导出. 我們选择了恆同映象 $S^3\to S^3$ 的一个固定的(但是任意的)扩张 $k:E^4,S^3\to S^7,S^3$. 这时，如果 $f'':E^r,S^{r-1}\to E^4,S^3$ 是 f 的一个扩张，則 $f'=kf''$ 是 f 到一个映象 $f':E^r,S^{r-1}\to S^7,S^3$ 的扩张，且显然地有，$f\to f'$ 导出 $\pi_{r-1}(S^3)$ 到 $\pi_r(S^7,S^3)$ 内的所需要的同态(事实上，同构).

定理 3.1. $\pi_{r-1}(S^3)$ 入 $\pi_r(S^4)$ 的导出的嵌入映象事实上是 $F:\pi_{r-1}(S^3)\to\pi_r(S^4)$.

首先我們在 $r=4$ 的情形下加以証明. 这时 k 代表 $\pi_4(S^7,S^3)$ 的一个生成元，使得有[1]：如果 $\psi:S^7\to S^4$ 是纖維映象，則映象 $\psi k:E^4,S^3\to S^4,p_0$ 生成 $\pi_4(S^4)$，又如果 S^4 被适当地取好了定向，則 ψk 代表 $\pi_4(S^4)$ 的正生成元. 因此把 $\pi_3(S^3)$ 嵌入 $\pi_4(S^4)$ 的同构(在此情形下，自然是一个到 $\pi_4(S^4)$ 上的同构)就正是 $F:\pi_3(S^3)\to\pi_4(S^4)$.

由此便得知 ψk 和映象 $\phi_4:E^4,S^3\to S^4,p_0$ 在同一类中. 我們回到定理 3.1，如果 $f:S^{r-1}\to S^3$ 代表 $\alpha\in\pi_{r-1}(S^3)$ 并且 $f'':E^r,S^{r-1}\to E^4,S^3$ 是 f 的任意的扩张，則 $\phi_4f'':E^r,S^{r-1}\to S^4,p_0$ 代表 $F(\alpha)$. 我們知道，把 $\pi_{r-1}(S^3)$ 嵌入 $\pi_r(S^4)$ 的同构是由对应 $f\to\psi kf''$ 所导出，并且有 $\psi k\sim\phi_4:E^4,S^3\to S^4,p_0$. 因此 $\psi kf''\sim\phi_4f''$，且 $\pi_{r-1}(S^3)$ 由 F 嵌入 $\pi_r(S^4)$.

定理 3.2. 設 $P:\pi_r(S^7)\to\pi_r(S^4)$ 由投射 $\psi:S^7\to S^4$ 所导出. 于是 P 和 $F:\pi_{r-1}(S^3)\to\pi_r(S^4)$ 是同构，並且 $\pi_r(S^4)=P\pi_r(S^7)+F\pi_{r-1}(S^3)$.

由完全类似的論証我們証明：

定理 3.3. 設 $P:\pi_r(S^{15})\to\pi_r(S^8)$ 由投射 $\psi:S^{15}\to S^8$ 导出. 于

---

1) 这里改变了在第五章中我們所用的記号，而以 ψ 代表纖維映象，免得与 $\phi_n:E^n,S^{n-1}\to S^n,p_0$ 混淆.

是 P 和 $F:\pi_{r-1}(S^7)\to\pi_r(S^8)$ 是同构，並且

$$\pi_r(S^8)=P\pi_r(S^{15})+F\pi_{r-1}(S^7).$$

作为一个特殊情形我們有 $\pi_7(S^4)=P\pi_7(S^7)+F\pi_6(S^3)$. 子羣 $P\pi_7(S^7)$ 是由霍卜夫映象 $S^7\to S^4$ 的类生成的无限阶循环羣，而 $F\pi_6(S^3)$ 是与 $\pi_6(S^3)$ 同构的子羣并且它是由霍卜夫不变量为零的一些元素組成. 現在 $F:\pi_7(S^4)\to\pi_8(S^5)$ 是到 $\pi_8(S^5)$ 上的，$F|F\pi_6(S^3)$ 是同构，并且 F 的核是由一个具有霍卜夫不变量 2 的特殊元素生成。 据此則 $\pi_8(S^5)$ 因之 $\pi_{n+3}(S^n)$ $(n\geqslant 5)$ 都有一个同构于 $\pi_6(S^3)$ 的子羣，并且 $\pi_8(S^5)$ 含有两倍于 $\pi_6(S^3)$ 的元素数；因为，如果 $\alpha\in\pi_7(S^4)$ 有霍卜夫不变量 1，$F(\alpha)$ 就不能属于 $F^2\pi_6(S^3)$. 一个类似的分析可以应用到 $\pi_{15}(S^8)$ 上.

$F:\pi_{r-1}(S^3)\to\pi_r(S^4)$ 和 $F:\pi_{r-1}(S^7)\to\pi_r(S^8)$ 常为同构的事实(即对于 r 的所有值)引出以下有趣的結論.

定理 3.4. 如果 $\alpha\in\pi_r(S^n)$，$\beta_1, \beta_2\in\pi_n(S^k)$，$k=3$ 或 7，則

$$(\beta_1+\beta_2)\circ\alpha=\beta_1\circ\alpha+\beta_2\circ\alpha.$$

因为

$$\begin{aligned}F((\beta_1+\beta_2)\circ\alpha)&=F(\beta_1+\beta_2)\circ F(\alpha)=(F(\beta_1)+F(\beta_2))\circ F(\alpha)\\&=F(\beta_1)\circ F(\alpha)+F(\beta_2)\circ F(\alpha)\quad(\text{据定理 2.3})\\&=F(\beta_1\circ\alpha)+F(\beta_2\circ\alpha)=F((\beta_1\circ\alpha)+(\beta_2\circ\alpha)).\end{aligned}$$

这样(对于 k 的所有值)，$(\beta_1+\beta_2)\circ\alpha-\beta_1\circ\alpha-\beta_2\circ\alpha$ 是在 $F:\pi_r(S^k)\to\pi_{r+1}(S^{k+1})$ 的核内，因而当数 $=3$ 或 7 时为 0.

定理 3.5. 如果 $\alpha\in\pi_r(S^n)$，$\beta_1, \beta_2\in\pi_n(S^2)$，$n\geqslant 3$，則

$$(\beta_1+\beta_2)\circ\alpha=\beta_1\circ\alpha+\beta_2\circ\alpha.$$

設 $\gamma\in\pi_3(S^2)$ 是霍卜夫映象类. 于是由第五章定理 2.1 就有 $\beta_i=\gamma\circ\beta_i'$，$\beta_i'\in\pi_n(S^3)$，$i=1, 2$. 所以

$$\begin{aligned}(\beta_1+\beta_2)\circ\alpha&=(\gamma\circ\beta_1'+\gamma\circ\beta_2')\circ\alpha=\gamma\circ(\beta_1'+\beta_2')\circ\alpha\\&=\gamma\circ(\beta_1'\circ\alpha+\beta_2'\circ\alpha)\quad(\text{据定理 3.4})\\&=\gamma\circ\beta_1'\circ\alpha+\gamma\circ\beta_2'\circ\alpha=\beta_1\circ\alpha+\beta_2\circ\alpha.\end{aligned}$$

定理 3.5 不計及 $n=2$ 的情形. 这里的情况有些不同.

定理 3.6. 如果 $\alpha\in\pi_r(S^2)$，並且 i 生成 $\pi_2(S^2)$，則对于所有

的整數 k，有

$$(ki)\circ\alpha = k\alpha, \quad r = 2$$
$$= k^2\alpha, \quad r > 2.$$

$r = 2$ 的情形无須重視. 假定 $r > 2$，因而 $\alpha = \gamma\circ\alpha'$，$\alpha'\in\pi_r(S^3)$. 由于 $ki\circ\gamma$ 的霍卜夫不变量是 k^2 并且 $\pi_3(S^2)$ 是无限循环的，于是$(ki)\circ\alpha = (ki)\circ\gamma\circ\alpha' = k^2\gamma\circ\alpha'$. 据定理 3.5，$k^2\gamma\circ\alpha' = k^2(\gamma\circ\alpha') = k^2\alpha$，这就証明了本定理.

可以同时地观察到，几乎是直接由关系式 $\alpha = \gamma\circ\alpha'$，以及 $F(\alpha\gamma) = 0$ 这一事实，就有

$$2F\pi_r(S^2) = 0$$

对于所有的 $r \geqslant 3$.

我們現在应用同緯映象理論于史第弗流形 $N_{n,m}$ 的研究. 事实上，我們只限于注意 $V_{n,2}$ 以及 $V_{n,n-1}(=\Omega_n)$.

在第五章中我們有过 $\pi_3(\Omega_2) = 0$，$\pi_3(\Omega_3) = Z_\infty$，$\pi_3(\Omega_4) = Z_\infty + Z_\infty$，$\pi_3(\Omega_5) = \cdots = \pi_3(\Omega_n) = Z_\infty$，并且知道 $\pi_3(\Omega_n)$ $(n \geqslant 5)$ 是由一个映象 $f: S^3 \to \Omega_4$ 的类所生成，这一映象是对于有纖維 Ω_3 且底空間为 S^3 的纖維空間 Ω_4 的截面. 我們現在証明:

定理 3.7. $\pi_4(\Omega_2) = 0$，$\pi_4(\Omega_3) = Z_2$，$\pi_4(\Omega_4) = Z_2 + Z_2$，$\pi_4(\Omega_5) = Z_2$.

由于 Ω_2 是圓，$\pi_4(\Omega_2) = 0$；Ω_3 是 3 維实射影空間并且被 S^3 所复蓋，据定理 2.16，因此 $\pi_4(\Omega_3) = Z_2$；据第五章(3.15)，$\pi_4(\Omega_4) \approx \pi_4(S^3) + \pi_4(S^3) = Z_2 + Z_2$. 我們現在来計算 $\pi_4(\Omega_5)$.

我們首先注意到，在直接和分解

$$\pi_4(\Omega_4) \approx \pi_4(\Omega_3) + \pi_4(S^3)$$

中，嵌 $\pi_4(S^3)$ 入 $\pi_4(\Omega_4)$ 的同构是由截面 $f: S^3 \to \Omega_4$ 导出. 現在考虑图解

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_3(\Omega_4) & \xrightarrow{i_3} & \pi_3(\Omega_5) \\ & & \downarrow \lambda & & \downarrow \mu \\ \pi_5(\Omega_5, \Omega_4) & \xrightarrow{d} & \pi_4(\Omega_4) & \xrightarrow{i_4} & \pi_4(\Omega_5) \end{array}$$

在这一图解中 λ 和 μ 是由在 $\pi_4(S^3)$ 的不为零的类中的一个映象 $S^4 \to S^3$ 所导出． 由于映象 $S^4 \to S^3$ 是一个映象 $S^3 \to S^2$ 的同緯映象，从定理 2.3 得知 λ 和 μ 是同态．我們还需要下面的事实：(i) λ 映 $\pi_3(\Omega_4)$ 到 $\pi_4(\Omega_4)$ 上；(ii) i_4 映 $\pi_4(\Omega_4)$ 到 $\pi_4(\Omega_5)$ 上；(iii) $\mu i_3 = i_4\lambda$；(iv) $i_4^{-1}(0) = d\pi_5(\Omega_5, \Omega_4)$；(v) $\pi_5(\Omega_5, \Omega_4) = Z_2$.

(i) 的証明． 由于重复盖 $S^3 \to \Omega_3$ 导出一个同构 $\pi_n(S^3) \approx \pi_n(\Omega_3)$，从而 $\pi_n(\Omega_3)$ 中的任一类可以由一个映象 $S^n \to S^3 \to \Omega_3$ 来代表．于是在 $\pi_4(\Omega_3)$ 中的两个类是零类以及含有 $S^4 \to S^3 \to \Omega_3$ 的类，其中 $S^4 \to S^3$ 是 $\pi_4(S^3)$ 中的不为零的类中的一个映象而 $S^3 \to \Omega_3$ 是复盖映象． 我們有 $\pi_n(\Omega_4) = i\pi_n(\Omega_3) + f^*\pi_n(S^3)$，其中 i 是內射，且 f^* 是由截面 $f: S^3 \to \Omega_4$ 导出的． 我們已經証明了的是 λ 映射 $i\pi_3(\Omega_3)$ 到 $i\pi_4(\Omega_3)$ 上，而图解前面的注意即是說 λ 映射 $f^*\pi_3(S^3)$ 到 $f^*\pi_4(S^3)$ 上．这样就証明了 (i)．(ii) 是第五章定理 3.9 的一个特殊情形 ($n = 4$, $m = 3$)；(iii) 显然，(iv) 由同伦序列的正合性得到，而 (v) 則由下面的事实得出：Ω_5 是 S^4 上的纖維空間纖維为 Ω_4，以及 $\pi_5(S^4) = Z_2$.

由于 $i_4\lambda$ 映射 $\pi_3(\Omega_4)$ 到 $\pi_4(\Omega_5)$ 上，且 $\mu i_3 = i_4\lambda$，这就有 μ 映射 $\pi_3(\Omega_5)$ 到 $\pi_4(\Omega_5)$ 上． 由于 $\pi_3(\Omega_5)$ 是循环羣（第五章定理 3.16），而 μ 是一个同态，$\pi_4(\Omega_5)$ 是循环羣． 現在 $\pi_4(\Omega_4) = Z_2 + Z_2$，$\pi_4(\Omega_5)$ 作为一个循环同态的象就必需是零或 Z_2．假若 $\pi_4(\Omega_5)$ 是零，那么 d 就会把 $\pi_5(\Omega_5, \Omega_4)$ 映射到 $\pi_4(\Omega_4)$ 上，而由于 $\pi_5(\Omega_5, \Omega_4)$ 只有两个元素，这是不可能的．因此 $\pi_4(\Omega_5) = Z_2$．它是由一个映象 $S^4 \to S^3 \to \Omega_4$ 的类所生成，其中 $S^4 \to S^3$ 是在 $\pi_4(S^3)$ 不为零的类中而 $S^3 \to \Omega_4$ 是截面．

我們現在能从偶 (Ω_5, Ω_4) 的同伦序列的正合性推出，$i_5: \pi_5(\Omega_4) \to \pi_5(\Omega_5)$ 是到 $\pi_5(\Omega_2) = 0$ 上的． 利用 $\pi_{n+2}(S^n) = Z_2$, $n \geqslant 2$，我們可以推論出 $\pi_5(\Omega_2) = 0$，$\pi_5(\Omega_3) = Z_2$，$\pi_5(\Omega_4) = Z_2 + Z_2$，$\pi_5(\Omega_5) = Z_2$，但我們不再进行詳細的論述．

可以同时証明作为 $\pi_4(\Omega_5)$ 的一个同态象的 $\pi_4(\Omega_6)$ 事实上是零，因此 $\pi_4(\Omega_n) = 0$，$n \geqslant 6$．証明較繁难，已由史挺路德在 Topology

of Fibre Bundles, p. 124，中給出。

回过来注意 $\pi_r(V_{n+1,2})$。我們将假定 n 是偶数，因为如我們在第五章(3.8)中所示明的，如果 n 是偶数，则 $\pi_r(V_{n+1,2}) \approx \pi_r(S^n) + \pi_r(S^{n-1})$，而这一情形中計算 $\pi_r(V_{n+1,2})$ 的問題便归結为計算球上的同伦羣問題。我們来証明[1]:

定理 3.8. 如果 n 是偶数且 $\geqslant 4$，則

$$\pi_{n-1}(V_{n+1,2}) = \pi_n(V_{n+1,2}) = Z_2.$$

考慮由纖維为 $N_{n,1} = S^{n-1}$ 的纖維空間 $V_{n+1,2}$ 到 S^n 上的投射所引出的序列

$$\pi_{n+1}(S^n) \xrightarrow{\bar{d}} \pi_n(S^{n-1}) \xrightarrow{i} \pi_n(V_{n+1,2}) \xrightarrow{j} \pi_n(S^n) \xrightarrow{\bar{d}} \pi_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i} \pi_{n-1}(V_{n+1,2}).$$

我們在第五章中証明过 $\bar{d}\pi_n(S^n)$ 是 $\pi_{n-1}(S^{n-1})$ 中的由 $2 \in \pi_{n-1}(S^{n-1})$ 生成的子羣。由于

$$i: \pi_{n-1}(S^{n-1}) \to \pi_{n-1}(V_{n+1,2})$$

是到 $\pi_{n-1}(V_{n+1,2})$ 上的并且 i 的核是由 2 生成，这就有 $\pi_{n-1}(V_{n+1,2}) = Z_2$。現在从这一正合序列(作为第五章定理 3.9 的一个特殊情形)得出

$$i: \pi_n(S^{n-1}) \to \pi_n(V_{n+1,2})$$

是到 $\pi_n(V_{n+1,2})$ 上的。由于 $n \geqslant 4$，故 $\pi_n(S^{n-1}) = Z_2$。如果我們能証明 $\bar{d}\pi_{n+1}(S^n) = 0$，本定理的結論便随之成立。这就是下面引理的一个直接結果。

引理 3.9. 設 $t: S^{n-1} \to S^{n-1}$ 代表 $\bar{d}\pi_n(S^n)$ 的生成元，並且設 t 導出自同态 $h: \pi_r(S^{n-1}) \to \pi_r(S^{n-1})$。于是 $h = \bar{d}F$，其中 F 是同諱映象 $F: \pi_r(S^{n-1}) \to \pi_{r+1}(S^n)$ 而 $\bar{d}$ 是同态 $\bar{d}: \pi_{r+1}(S^n) \to \pi_r(S^{n-1})$。

設 $\alpha = F\beta$，$\alpha \in \pi_{r+1}(S^n)$，$\beta \in \pi_r(S^{n-1})$。于是 α 可以由一个映象 $E^{r+1}, S^r \xrightarrow{f} E^n, S^{n-1} \xrightarrow{\phi_n} S^n, p_0$ 代表，其中的 $f|S^r$ 代表 β，而 ϕ_n 有它的习有[2]的意义。如果 $\psi: V_{n+1,2} \to S^n$ 是纖維映射，則

1) 自然，$\pi_1(V_{3,2}) = Z_2$，但 $\pi_2(V_{3,2}) = 0$，因此 $n = 2$ 的情形便被适当地从定理中除去。

2) 即指第二章 §2 中的 ϕ_n——譯者注。

$\psi u: E^n, S^{n-1} \to S^n, p_0$ 同伦 ϕ_n，其中 $u: E^n, S^{n-1} \to V_{n+1,2}, S^{n-1}$ 是在第五章定理 3.7 的証明中用到过的那个映象，且使得 $u|S^{n-1} = t$. 設 ψ 导出同构 $\psi^*: \pi_{r+1}(V_{n+1,2}, S^{n-1}) \approx \pi_{r+1}(S^n)$. 由于 $\psi uf: E^{r+1}, S^r \to S^n, p_0$ 代表着 $\alpha \in \pi_{r+1}(S^n)$，从而 $uf: E^{r+1}, S^r \to V_{n+1,2}, S^{n-1}$ 代表 $\psi^{*-1}(\alpha)$. 现在

$$\bar{d}: \pi_{r+1}(S^n) \to \pi_r(S^{n-1})$$

正是 $d\psi^{*-1}$，其中 d 是边緣同态

$$\pi_{r+1}(V_{n+1,2}, S^{n-1}) \to \pi_r(S^{n-1}).$$

这样 $\bar{d}(\alpha)$ 就由 $uf|S^r$，也就是由一个映象 $S^r \to S^{n-1} \to S^{n-1}$ 来代表，其中 $S^r \to S^{n-1}$ 代表 β，且 $S^{n-1} \to S^{n-1}$ 就正是映象 t. 这意味着 $\bar{d}(\alpha) = h(\beta)$，或 $\bar{d}F(\beta) = h(\beta)$. 从而完成了引理的証明.

现在設 n 是偶数且 $\geqslant 4$. 于是据定理 2.10，$\bar{d}\pi_{n+1}(S^n) = \bar{d}F(\pi_n(S^{n-1}))$；据引理 3.9，$= h(\pi_n(S^{n-1}))$，而且 $t: S^{n-1} \to S^{n-1}$ 是一个度数为 2 的映象. 由于 $\pi_n(S^{n-1}) = F\pi_{n-1}(S^{n-2})$，由[1]定理 2.3 以及 $\pi_n(S^{n-1}) = Z_2$，則

$$h(\pi_n(S^{n-1})) = 2\pi_n(S^{n-1}) = 0,$$

这就証明了定理.

如果我們利用 $\pi_{n+2}(S^n) = Z_2$, $n \geqslant 2$ 这一事实，在 n 是偶数且 $\geqslant 4$ 的假定下用同样的方法可以証明 $\pi_{n+1}(V_{n+1,2})$ 是 Z_2 的一个扩张. 巴雷脱 (M. Barrat) 和培奇特 (G. Paechter) 于最近証明了，事实上 $\pi_{n+1}(V_{n+1,2}) = Z_4$.

定理 3.10. $\pi_4(V_{n+3,n}) = 0$, $n \geqslant 3$.

据第五章(3.5)足够証明 $\pi_4(V_{6,3}) = 0$. 我們利用 $\pi_4(\Omega_6) = 0$ 这一事实. 据第五章(3.12)，$\pi_4(V_{6,4}) = 0$. 现在 $V_{6,4}$ 是 $V_{6,3}$ 上的纖維空間且以 $V_{3,1} = S^2$ 为纖維. 这样我們有同伦序列

$$\cdots \to \pi_4(V_{6,4}) \xrightarrow{\bar{j}} \pi_4(V_{6,3}) \xrightarrow{\bar{d}} \pi_3(S^2) \to \cdots.$$

据第五章(3.6)，$\pi_4(V_{6,3})$ 是 $\pi_4(V_{5,2})$ 的同态象，因此据定理3.8，

1) 一般，自同态 $h: \pi_r(S^{n-1}) \to \pi_r(S^{n-1})$，$n$ 是偶数，由 $h(\alpha) = 2\iota \circ \alpha$ 給出，其中 ι 生成 $\pi_{n-1}(S^{n-1})$.

$\pi_4(V_{6,3})$ 是 0 或 Z_2. 这样 $d\pi_4(V_{6,3})$ 作为无限阶循环羣的一个子羣是零，从而 j 是到 $\pi_4(V_{6,3})$ 上而 $\pi_4(V_{6,3})=0$.

4. 广义霍卜夫不变量. 这一节的主要目的是要示明，定义于第一节中的同态

$$H^*:\pi_r(S^n)\to\pi_{r+1}(S^{2n})$$

的确推广了霍卜夫不变量. 我們首先研究具有一个公共点的一些球的并集上的同伦羣. 在第四章 § 6 中我們看到，如果 Y, Y' 是具有一个公共点的空間，且若我們把 Y 和 $Y\times Y'_0$, Y' 和 $y_0\times Y'$, $y_0\in Y$, $y'_0\in Y'$ 恆同起来，則 Y, Y' 和 $Y\cup Y'$ 变为 $Y\times Y'$ 的子空間且我們有

$$\pi_n(Y\cup Y')\approx\pi_n(Y)+\pi_n(Y')+\pi_{n+1}(Y\times Y',Y\cup Y'),\quad n>1. \tag{4.1}$$

此外，$\pi_n(Y)$, $\pi_n(Y')$ 由內射嵌入 $\pi_n(Y\cup Y')$ 又 $\pi_{n+1}(Y\times Y', Y\cup Y')$ 由边緣(同构)

$$d:\pi_{n+1}(Y\times Y',Y\cup Y')\to\pi_n(Y\cup Y')$$

嵌入; 而 $\pi_n(Y\cup Y')$ 由为投射 $Y\cup Y'\to Y$, $Y\cup Y'\to Y'$ 导出的同态投射到 $\pi_n(Y)$, $\pi_n(Y')$ 上. 如果我們称这些投射为 ρ, ρ' 而內射是 i, i', 則 $\pi_n(Y\cup Y')$ 由为 $Q(x)=d^{-1}(x-i\rho x-i'\rho'x)$, $x\in\pi_n(Y\cup Y')$,給定的 Q 投射到 $\pi_{n+1}(Y\times Y',Y\cup Y')$ 上.

現在設 $Y=S^p$, $Y'=S^q$. 于是

$$\pi_n(S^p\cup S^q)\approx\pi_n(S^p)+\pi_n(S^q)+\pi_{n+1}(S^p\times S^q,S^p\cup S^q).$$

推广 § 2 的 (C)，設 $\phi_p:E^p\to S^p$ 定义如前，类似地对于 ϕ_q; 并且定义

$$\phi_{p,q}:E^p\times E^q\to S^p\times S^q \text{ 为 } \phi_{p,q}(x,y)=(\phi_p(x),\phi_q(y)).$$

于是 $S^p\times S^q=\phi_{p,q}(E^p\times E^q)$, $\phi_{p,q}$ 同胚地映 $E^p\times E^q$ 的內部到 $S^p\times S^q-S^p\cup S^q$ 上，且 $\phi_{p,q}$ 映射 $E^p\times E^q$ 的边緣入 $S^p\cup S^q$. 这样 $\phi_{p,q}$ 是一个对于 $(p+q)$ 維胞腔的特征映象，这一胞腔是附加到 $S^p\cup S^q$ 上去形成 $S^p\times S^q$. 設 $\phi_{p,q}$ 导出

$$g_r:\pi_r(E^{p+q},\dot E^{p+q})\to\pi_r(S^p\times S^q,S^p\cup S^q).$$

据定理 2.14，如果 $2\leqslant r\leqslant p+q+\min(p,q)-2$, 則 g_r 是一

个到 $\pi_r(S^p \times S^q, S^p \cup S^q)$ 上的同构，并且，利用同伦边緣同构 $d':\pi_r(E^{p+q}, \dot{E}^{p+q}) \approx \pi_{r-1}(S^{p+q-1})$，如果

$$2 \leqslant r \leqslant p+q+\min(p,q)-3,$$

我們就有

$$\pi_r(S^p \cup S^q) \approx \pi_r(S^p) + \pi_r(S^q) + \pi_r(S^{p+q-1}).$$

作为一个直接結果，我們得到：

定理 4.2. 如果 $2 \leqslant r \leqslant p+q-2$，则

$$\pi_r(S^p \cup S^q) \approx \pi_r(S^p) + \pi_r(S^q).$$

我們現在較严密地研究这种状态，于其中 $\pi_r(S^{p+q-1})$ 被嵌入到 $\pi_r(S^p \cup S^q)$. 考慮映象

$$\phi_{p,q}|(E^p \times E^q)^{\cdot}:(E^p \times E^q)^{\cdot} \to S^p \cup S^q.$$

恆同 $(E^p \times E^q)^{\cdot}$ 于 S^{p+q-1}，显然这一映象导出一个同态

$$h_r:\pi_r(S^{p+q-1}) \to \pi_r(S^p \cup S^q)$$

满足 $h_r d' = d g_{r+1}$. 由于 $\pi_{r+1}(S^p \times S^q, S^p \cup S^q)$ 由 d 嵌入到 $\pi_r(S^p \cup S^q)$，且

$$g_{r+1} d'^{-1}:\pi_r(S^{p+q-1}) \approx \pi_{r+1}(S^p \times S^q, S^p \cup S^q),$$

这就有 $\pi_r(S^{p+q-1})$ 由（同构）h_r 嵌入 $\pi_r(S^p \cup S^q)$，且 $\pi_r(S^p \cup S^q)$ 由 $d' g_{r+1}^{-1} Q$ 投射到 $\pi_r(S^{p+q-1})$ 上. 映象 $\phi_{p,q}|(E^p \times E^q)^{\cdot}$ 是如下定义的一个"威脱海特-乘积映象"的特殊情形[1]. 設 $\alpha, \beta \in \pi_m(Y)$, $\pi_n(Y)$ 各自由

$$f:E^m, \dot{E}^m \to Y, y_0, \quad g:E^n, \dot{E}^n \to Y, y_0$$

所給定. 定义 $h:(E^m \times E^n)^{\cdot} \to Y$ 为 $h(a, b) = f(a)$, $a \in E^m$, $b \in \dot{E}^n$, $h(a, b) = g(b)$, $a \in \dot{E}^m$, $b \in E^n$. 如果我們在 $\dot{E}^m \times \dot{E}^n$ 上选择一个固定点作为基点，h 就在 $\pi_{m+n-1}(Y)$ 中决定了一个元素. 这一元素只依賴于 α, β，記作 $[\alpha, \beta]$；它便叫作 α 和 β 的**威脱海特**积. 如果我們把 $\pi_p(S^p)$ 和它的内射入 $\pi_p(S^p \cup S^q)$ 的象恆同起来，并且类似地处理 $\pi_q(S^q)$，则 $\phi_{p,q}(E^p \times E^q)^{\cdot}$ 代表

$$[i^{(p)}, i^{(q)}] \in \pi_{p+q-1}(S^p \cup S^q),$$

---

1) 另一特殊情形是用于定理 1.6 証明中的映象以及定理 2.15 中的陈述.

其中 $i^{(p)}$ 生成 $\pi_p(S^p)$，$i^{(q)}$ 生成 $\pi_q(S^q)$。这样，在 $r = p + q - 1$，$p \geqslant 2, q \geqslant 2$ 的特殊情形中，(4.2) 便归結[1]到 J. H. C. 威脫海特的論文"On add relations to homotopy groups", *Ann. Math.*, 42 (1941), 409—428 頁中的定理 4，其中他第一个定义了乘积 $[\alpha,\beta]$.

現在置 $p = q = n$，如果 $2 \leqslant r \leqslant 3n - 3$，則

$$\pi_r(S_1^n \cup S_2^n) \approx \pi_r(S_1^n) + \pi_r(S_2^n) + \pi_r(S^{2n-1}). \qquad (4.3)$$

G. W. 威脫海特然后把他的广义霍卜夫不变量定义作 $\bar{Q}\mu$，其中 $\mu:\pi_r(S^n) \to \pi_r(S_1^n \cup S_2^n)$ 定义于 §1 中，并且 $\bar{Q} = d'g_{r+1}^{-1}Q$ 是投射 $\pi_r(S_1^n \cup S_2^n) \to \pi_r(S^{2n-1})$. 我們以字母 H 記同态 $\bar{Q}\mu$，因之当 $r \leqslant 3n - 3$ 时所定义的 H 是一个同态 $\pi_r(S^n) \to \pi_r(S^{2n-1})$.

定理 4.4. 当 H 有定义时，$H^* = FH$.

这里的 F 自然是同纬映象且 $H^* = \chi Q\mu$ 定义如 §1. 現在 $FH = F\bar{Q}\mu = Fd'\bar{g}_{r+1}Q\mu$，因之无疑地能充分示明 $Fd'\bar{g}_{r+1} = \chi$. 由于 g_{r+1} 是一个同构，它只是在特殊情形 $(X^*, X) = (S_1^n \times S_2^n, S_1^n \cup S_2^n)$ 中 (2.2) 的一个再表示而已.

系 4.5. $F^{-1}H^*:\pi_r(S^n) \to \pi_r(S^{2n-1})$ 是一个同态，它当

$$F:\pi_r(S^{2n-1}) \to \pi_{r+1}(S^{2n})$$

是一个(在上)同构(即当 $r \leqslant 4n - 4$，或 $r = 5, n = 2$，或 $r = 13, n = 4$) 时有定义，且在 $r \leqslant 3n - 3$ 时与 H 重合.

G. W. 威脫海特利用 (4.3) 給了左分配律以新的見解. 由于 $\mu(\alpha) = (i_1^{(n)} + i_2^{(n)})\circ\alpha$, $\alpha \in \pi_r(S^n)$，其中 $i_\lambda^{(n)}$ 生成 $\pi_n(S_\lambda^n)$，$\lambda = 1, 2$，当 $r \leqslant 3n - 3$ 时这就有[2]

$$\mu\alpha = (i_1^{(n)} + i_2^{(n)})\circ\alpha = i_1^{(n)}\circ\alpha + i_2^{(n)}\circ\alpha + [i_1^{(n)}, i_2^{(n)}]\circ H(\alpha). \qquad (4.6)$$

現在設 $\beta_1, \beta_2 \in \pi_n(X)$，設 $f_\lambda:S_\lambda^n \to X$ 代表 β_λ，$\lambda = 1, 2$，并且設 β 是由 $f|S_\lambda^n = f_\lambda$ 給定的映象 $f:S_1^n \cup S_2^n \to X$ 的同伦类[3]. 然后显

1) 我們还需要这样的事实：如果 $m \geqslant 2, n \geqslant 2$，$[\alpha,\beta]$ 在 α, β 內是双綫性的，而这个事实已在我們所提到的論文中証明过.

2) 显然，在投射 $S_1^n \cup S_2^n \to S_\lambda^n$ 下，$Ci_1^{(n)} + i_2^{(n)}\circ\alpha$ 投射到 $i_\lambda^{(n)}\circ\alpha$ 上，$\lambda = 1, 2$.

3) 相对于作为基点的 S_1^n，S_2^n 的公共点.

然有 $\beta\circ(i_1^{(n)}+i_2^{(n)})=\beta_1+\beta_2$；这直接从同伦羣中加法的定义得出。驗証 $\beta\circ[i_1^{(n)}, i_2^{(n)}]=[\beta_1,\beta_2]$ 也是直接的；代表映象实际上将是同一个。最后，我們指出 $\beta\circ i_1^{(n)}=\beta_1$，$\beta\circ i_2^{(n)}=\beta_2$。从(4.6)我們有

$$\beta\circ(i_1^{(n)}+i_2^{(n)})\circ\alpha=\beta\circ i_1^{(n)}\circ\alpha+\beta\circ i_2^{(n)}\circ\alpha+\beta\circ[i_1^{(n)}, i_2^{(n)}]\circ H(\alpha),$$

因之我們就証明了：

定理 4.7. 如果 $\alpha\in\pi_r(S^n)$，$\beta_1, \beta_2\in\pi_n(X)$，$r\leqslant 3n-3$，則

$$(\beta_1+\beta_2)\circ\alpha=\beta_1\circ\alpha+\beta_2\circ\alpha+[\beta_1, \beta_2]\circ H(\alpha).$$

由于 $H^*=FH:\pi_{2n-1}(S^n)\to\pi_{2n}(S^{2n})$，显然足够示明，$H$ 推广了霍卜夫不变量，对于 H^* 从而也有同样結果。 H 推广霍卜夫不变量的涵意陈述于下面的定理中：

定理 4.8. 如果 $\alpha\in\pi_{2n-1}(S^n)$，則 $H(\alpha)=\pm\gamma(\alpha)i^{(2n-1)}$，其中 $\gamma(\alpha)$ 是 α 的霍卜夫不变量，並且 $i^{(2n-1)}$ 生成 $\pi_{2n-1}(S^{2n-1})$。

如果 n 是奇数，則 $\gamma(\alpha)=0$；据定理 2.15 則 α 是同緯映象元素。据定理 2.9，則有

$$H^*(\alpha)=0,\ 且\ H(\alpha)=F^{-1}H^*(\alpha)=0.$$

設 n 是偶数．在定理 4.7 中置 $X=S^n, \beta_1=\beta_2=i^{(n)}, r=2n-1$．于是

$$2i^{(n)}\circ\alpha=i^{(n)}\circ\alpha+i^{(n)}\circ\alpha+[i^{(n)}, i^{(n)}]\circ H(\alpha)=$$
$$=2\alpha+[i^{(n)}, i^{(n)}]\circ H(\alpha).$$

我們現在取每一边的霍卜夫不变量并且設 $H(\alpha)$ 这时代表类 $H(\alpha)\in\pi_{2n-1}(S^{2n-1})$ 的特征度数． 我們要証明在这样的涵义上，$H(\alpha)$ 等于 $\pm\gamma(\alpha)$。

据引理 1.2 和 1.1，$\gamma(2i^{(n)}\circ\alpha)=4\gamma(\alpha)$，$\gamma(2\alpha)=2\gamma(\alpha)$，且 $\gamma([i^{(n)}, i^{(n)}]\circ H(\alpha))=H(\alpha)\times\gamma([i^{(n)}, i^{(n)}])$．現在 $[i^{(n)}, i^{(n)}]$ 正是在定理 1.6 中具有霍卜夫不变量 ± 2 的元素． 因此 $4\gamma(\alpha)=$ $=2\gamma(\alpha)\pm 2H(\alpha)$ 或 $2\gamma(\alpha)=\pm 2H(\alpha)$． 由于 $\gamma(\alpha)$，$H(\alpha)$ 是整数，我們可以用 2 来除而得到所要求的結果．

在結束本节时我們給出 H 和已經用到的球上同伦羣的性质之間的一个关系．但是，我要着重指出，引入 H 和 H^* 的动机在于获

得球上同伦羣的非零元素.

我們回忆到 $\pi_r(S^n) \approx \pi_r(S^{2n-1}) + \pi_{r-1}(S^{n-1})$, $r \geqslant 2$, $n=2,4$ 或 8。于是有一个投射 $H_1: \pi_r(S^n) \to \pi_r(S^{2n-1})$.

定理 4.9. 如果 $r \leqslant 3n-3$, 则 $H_1 = H$.

設 β 是霍卜夫映象 $S^{2n-1} \to S^n$ 的类. 如果 $\alpha \in \pi_r(S^n)$, 則 $\alpha = \beta \circ \gamma + \delta$, 其中 $\gamma \in \pi_r(S^{2n-1})$, $\delta \in F\pi_{r-1}(S^{n-1})$, 且 $\gamma = H_1(\alpha)$. 于是 $H(\delta) = 0$ 且 $H(\alpha) = H(\beta \circ \gamma)$.

現在

$$
\begin{aligned}
H(\beta\circ\gamma) &= \bar{Q}\mu(\beta\circ\gamma)\\
&= \bar{Q}((i_1^{(n)} + i_2^{(n)})\circ\beta\circ\gamma)\\
&= \bar{Q}((i_1^{(n)}\circ\beta + i_2^{(n)}\circ\beta + [i_1^{(n)}, i_2^{(n)}])\circ\gamma),\\
&\qquad \text{因为 } H(\beta) \text{ 是 } i^{(2n-1)}\\
&= \bar{Q}(i_1^{(n)}\circ\beta\circ\gamma + i_2^{(n)}\circ\beta\circ\gamma + [i_1^{(n)}, i_2^{(n)}]\circ r),\\
&\qquad \text{因为 } \gamma \text{ 是个同緯映象元素}\\
&= \bar{Q}h_r(\gamma), \quad \text{其中 } h_r(\gamma) = [i_1^{(n)}, i_2^{(n)}]\circ\gamma\\
&= \gamma, \quad \text{因为 } h_r \text{ 內射 } \pi_r(S^{2n-1}) \text{ 到 } \pi_r(S_1^n \cup S_2^n) \text{ 內且 } \bar{Q}\\
&\qquad \text{投射 } \pi_r(S_1^n \cup S_2^n) \text{ 到 } \pi_r(S^{2n-1}) \text{ 上}\\
&= H_1(\alpha).
\end{aligned}
$$

事实上,定理 4.9 可以进一步地推广为这样的定理:如果 $H_1(\alpha)$ 是一个同緯映象元素, 則 $H^*(\alpha) = FH_1(\alpha)$, 但我們将不在这里証明它. 如果 $H_1(\alpha)$ 不是一个同緯映象元素,近来我們已經証明关系式 $H^* = FH_1$ 不一定成立.

第七章　威脱海特胞腔复合形[1]

1. 胞腔复合形的定义和CW-复合形的基本性質. 由于单純剖分在許多情況中都是一个冗长无味的运算，为了方便起見也为了使其具有更大的普遍性起見，可以将我們对于单純复合形的概念扩张成为一个更为普遍的胞腔复合形的概念. 这种扩张得归功于J. H. C. 威脱海特，他定义了如下的一个胞腔复合形[2].

一个胞腔复合形K是一个豪斯道夫空間，这一空間是一些互不相交的(开)胞腔e^n的幷集. 胞腔e^n的閉包$\bar{e}^n$是一个n維元体E^n在一个映象$f: E^n, S^{n-1} \to K, K^{n-1}$下的象，使得$f | E^n - S^{n-1}$是到$e^n$上的一个同胚映象，这里的$K^{n-1}$是維数不超过$(n-1)$的各胞腔的点集和. 这样，用第六章的术語来說，$e^n$是由映象$f | S^{n-1}$附加到$K^{n-1}$而$f$是对于$e^n$的一个特征映象，应該注意到这一定义自然与$K$上的拓扑結构相容. 因为，$E^n$旣然是列紧的而$K$是豪斯道夫空間，則$\bar{e}^n$自然是一个閉集. 此外，不能有一个满足$e^n \subset \subset F \subset \bar{e}^n$的閉集$F$，因为不存在一个閉集$f^{-1}(F)$满足$E^n - S^{n-1} \subset \subset f^{-1}(F) \subset E^n$，这一包含关系当然是严格的包含关系.

K的一个子复合形L是K的某些胞腔的幷集，因此如果$e^n \subset L$，則$\bar{e}^n \subset L$. 这样，如果以K^r表示維数$\leqslant r$的胞腔的幷集，則K^r是K的一个子复合形. 应該注意到$\bar{e}^n$不必是K的一个子复合形，且K的一个子复合形不必是K的一个閉子集. 作为后者畸形的一个例子，任意的豪斯道夫空間可以考虑作0維胞腔的一个幷集，而因此任意的子集是一个子复合形. 为了避免这种特

---

1) 这一章材料的很大一部分是根据于 J. H. C. Whitehead 的 "Combinatorial homotopy, I", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55, 3 (1949年), 213—245, 以后我們把此书簡称作CHI.

2) 依据威脱海特的定义，我們不再区别复合形和它所屬的空間. 因此我們在这里把第三章所用的記号$|K|$省去.

殊情形同时也为了能引入有限单純复合形的同伦論的許多方法和結果，威脫海特对于他所研究的胞腔复合形引进了如下的一些限制。

一个胞腔复合形是**閉包有限的**，如果，对于每一个 e^n，$\bar{e}^n$ 包含在一个有限子复合形中。一个胞腔复合形具有**弱拓扑結构**，如果一个子集 X 是閉集，当 $X \cap \bar{e}^n$ 对于复合形的每一个胞腔 e^n 是閉集时。应該注意到，如果 K 是閉包有限的，設 X 当 $X \cap L$ 对于 K 的每一个有限子复合形为閉集时也是閉集的話，则 K 有弱拓扑結构。如果 K 是閉包有限的并且有弱拓扑結构，则它叫作一个**CW-复合形**。K 的維数是它的胞腔的維数的最小上界(或者是∞)。为了方便起見，我們还要假定 K 是連通的。

下面的两个例子显示了胞腔复合形优于单純复合形：

(A) $S^n = e^0 \cup e^n$. 这就是說，n 維球可以分解为两个胞腔：一个是 0 維胞腔 e^0；另一个是 n 維胞腔 e^n，$\bar{e}^n = S^n$ 是一个映象 $f: E^n, \dot{E}^n \to S^n, e^0$ 的象，使得有 $f|E^n - \dot{E}^n$ 是到 $S^n - e^0$ 上的同胚映象。

(B) $\sigma^n \times I = \sigma^n \times 0 \cup \sigma^n \times (0,1) \cup \sigma^n \times 1$. 这就是說，如果 σ^n 是一个开 n 維单純形，它是一个 n 維胞腔，则 $\sigma^n \times I$ 可以分解成两个 n 維胞腔，$\sigma^n \times 0$ 和 $\sigma^n \times 1$，以及一个 $(n+1)$ 維胞腔 $\sigma^n \times (0,1)$。由于 $\bar{\sigma}^n = \sigma^n \cup S^{n-1} = \sigma^n \cup e^0 \cup e^{n-1}$，这也就給出了 $\bar{\sigma}^n \times I$ 的胞腔分解：分解成两个 0 維胞腔，$e^0 \times 0$，$e^0 \times 1$；一个 I 維胞腔，$e^0 \times (0,1)$；两个 $(n-1)$ 維胞腔，$e^{n-1} \times 0$，$e^{n-1} \times 1$；三个 n 維胞腔，$e^{n-1} \times (0,1)$，$\sigma^n \times 0$，$\sigma^n \times 1$；和一个 $(n+1)$ 維胞腔，$\sigma^n \times (0,1)$。

在 CHI 中，J. H. C. 威脫海特列举了 CW-复合形的若干性質。其中对于我們在这里最重要的有下面几个。它們的証明已在 CHI 中給出。

定理 1.1. 如果 $X \subset K$ 是緊致的，则 X 包含在 K 的一个有限单純复合形中。

定理 1.2. 如果 K, L 是 CW-复合形，此外且 L 是局部有限

的（即 L 的每一个点是一个有限子复合形的一个内点），则 $K\times L$ 是一个 CW-复合形.

$K\times L$ 的胞腔是 $e\times e'$，其中 e 是 K 的一个胞腔，e' 是 L 的一个胞腔．我們主要[1]需要这一定理是在 $L=I$ 时．在这个情况下，当 L 是一个有限复合形时，CHI 中所給的証明当可大大地簡化.

定理 1.3. (i) K 的一个閉子集 X 到 Y 的一个变换 $f: X\to Y$ 是連續的，假如 $f|X\cap\bar{e}$ 对于 K 的每一个胞腔 e 是連續的．(ii)（K 的一个閉子集 X 到 Y 的变换的集合 $f_t: X\to Y$ 是一个同伦，）假如 $f_t|X\cap\bar{e}$ 对于 K 的每一个胞腔 e 是一个同伦.

(i) 是 K 具有弱拓扑結构这一事实下的很容易求得的結果．(ii) 是依据定理 1.2 以及 $L=I$ 和 (i) 而得出的.

定理 1.4.（对于 CW-复合形的同伦扩張定理），[2]設 $f_0: K\to Y$ 並且設 $g_t: L\to Y$ 是 $g_0=f_0|L$ 的一个同伦，其中 L 是 K 的一个子复合形．于是有一个同倫 $f_t: K\to Y$ 且 $f_t|L=g_t$.

我們对此加以証明，因为在某种意义上这是有关 CW-复合形論証的典型代表，而且在 CHI 的証明中需要参看 J. H. C. 威脫海特的較早的一篇論文．如 CHI 中所指出的，我們需要下面的引理：

引理 1.5. 在定理 1.4 中設 $K=K^{n-1}\cup e^n$，$L=K^{n-1}$．于是本定理成立.

設 $G': K\times 0\cup K^{n-1}\times I\to Y$ 由

$$G'(p,0)=f_0(p),\ p\in K,\quad G'(q,t)=g_t(q),\ q\in K^{n-1}$$

所給定．設[3] $h: E^n, \dot{E}^n\to K, K^{n-1}$ 是对于 e^n 的一个特征映象，因此 $h|E^n-\dot{E}^n$ 是到 e^n 上的一个同胚映象，由此可定义

$$H: E^n\times I\to K\times I \text{ 为 } H(x,t)=(h(x),t),\ x\in E^n.$$

---

1) 杜格 (C. H. Dowker) 所举的一个例子示明，除了 L 是 CW-复合形外，如果对它不加以更进一步的限制，这个定理将是不正确的.

2) 与第二章定理 4.9 試加比較.

3) 这里我們不用 S^{n-1} 这一記号而用 $\dot{E}^n$ 来代表 E^n 的边界，用以強調 E^n 不必是一个欧几里得 n 維元体的事实.

設 $T': E^n \times 0 \cup \dot{E}^n \times I \to Y$ 由 $T' = G'H$ 給定。据第二章引理 3.1，T' 可以扩张成 $T: E^n \times I \to Y$。定义 $G: K \times I \to Y$ 为 $G|K^{n-1} \times I = G'$, $G|\bar{e}^n \times I = TH^{-1}$。于是 G 是单值的，因为，如果 $p \in \bar{e}^n - e^n$，則

$$TH^{-1}(p, t) = G'HH^{-1}(p, t) = G'(p, t).$$

同样也很清楚 G 是 G' 的一个扩张，因此只剩下要証明 G 是連續的。現在証明 $G|\bar{e}^n \times I$ 是連續的就足够了。让我們写下 $F = TH^{-1}: \bar{e}^n \times I \to Y$。如果 Z 是 Y 的任意一个子集，据 F 是单值的这一事实就有 $F^{-1}(Z) = H(T^{-1}(Z))$。如果 Z 是閉集，則 $T^{-1}(Z)$ 也是閉集，并且由于 $E^n \times I$ 是紧致的，因而它也是紧致的。由于 H 是連續的且 $K \times I$ 是一个豪斯道夫空間，从而 $H(T^{-1}(Z))$ 是閉集，因此 F 連續。

为了証明这一定理；我們設 $K_r = L \cup K^r$，其中 K^{-1} 是一个空集。定义 $f_t^{-1} = g_t: L \to Y$ 同时假定我們已經扩张 g_t 到 $f_t^{n-1}: K_{n-1} \to Y$ 且 $f_0^{n-1} = f_0|K_{n-1}$。据引理，我們能够对每一个 $e^n \in K - L$ 扩张 f_t^{n-1}，而据定理 1.3 (ii)，結果所得的同伦 $f_t^n: K_n \to Y$ 将为連續的。如此我們得到一个同伦序列

$$f_t^n: K_n \to Y,\ f_0^n = f_0|K_n,\ f_t^n|K_{n-1} = f_t^{n-1},$$

而所需要的同伦 $f_t: K \to Y$ 是由 $f_t|K_n = f_t^n$ 給出。

我們可以在一个十分类似的方法下来証明空間 Y 具有一个直到維数 n 均为零的同伦羣，当而且只当一个 n 維 CW-复合形到 Y 的每一个映象是零伦的。把它和定理 1.4 相結合，我們得到下面的定理：

定理 1.6. $\pi_r(Y) = 0$, $r = 1, \cdots, n$, 当而且只当映 CW-复合形 K 入 Y 的每一个映象是同倫于这樣的一个映象 f, f 映 K^n 成一个点.

这一定理可以如下地相对化：

定理 1.7. $\pi_r(Y, Y_0) = 0$, $r = 1, \cdots, n$, 当而且只当映 CW-复合形 K 入 Y 的每一个映象是同倫于这樣的一个映象 f, f 映 K^n 入 Y_0.

如果L是K的一个子复合形，并且給定了一个映射$K, L \to$ $\to Y, Y_0$，則根据定理 1.7 的构造很明显地可以使我們选定这样的同伦，使得L的象在整个的同伦中每一个点都固定不变。我們也注意到在定理 1.6 和 1.7 中，n可以允許取值∞。

如果对于每一个n有$f(K^n) \subset P^n$，我們称映象$f: K \to P$为胞腔式的，其中P也是一个胞腔复合形。

定理 1.8（**胞腔式的逼近定理**）．設

$$f_0: K \to P$$

是映K到 CW-复合形P內的一个映象使得$f_0|L$是胞腔式的，其中L是K的一个子复合形．于是$f_0 \sim f_1: K \to P$, rel L，其中f_1是胞腔式的．

当$K = \sigma^n$, $L = \dot{\sigma}^n$时我們来証明[1]这个定理．一般情形下的証明則可由 CHI 中 228 頁的性質(K)中得出：

据定理 1.1，$f_0(\sigma^n)$既为紧致的，它包含于P的一个有限子复合形Q中．于是f_0是一个映象$f_0: \sigma^n, \dot{\sigma}^n \to Q, Q^{n-1}$設$Q$是$m$維的，$m > n$，設$e^m$是$Q$的一个$m$維胞腔并且設$q_0 \in e^m$．設$E$是$\sigma^n$的三角剖分，它当$\sigma$是与$f_0^{-1}(q_0)$相交的$E$的一个单純形时，恰能使$f_0(\bar{\sigma}) \subset e^m$．設$A$是$E$的子复合形由一些与$f_0^{-1}(q_0)$相交的閉子复合形組成，并且設$B = \overline{E - A}$．于是$f_0(B) \subset Q - q_0$，从而

$$f_0(A \cap B) \subset e^m - q_0.$$

由于A至多是n維的且由于$\pi_k(e^m - q_0) = 0$, $k = 1, \cdots, m -$ $- 2 \geqslant n - 1$，从而$f_0|A \cap B$可以一步步地历經$A - (A \cap B)$的单純形扩张到一个映象$f_0': A \to e^m - q_0$．由于f_0, f_0'都是映象$A \to e^m$，它們是同伦的，且我們可以把同伦扩张到整个E上，象定义f_0在B上一样地定义它．因此$f_0 \sim f_0': \sigma^n \to Q$, rel $\dot{\sigma}^n$，且

$$f_0' \sigma^n \subset Q - q_0.$$

其次，我們从e^m中直接得出σ^n的象．精确地講，設$g: E^m, \dot{E}^m \to Q, Q^{m-1}$是对于$e^m$的一个特征映象，并且設$g(p_0) = q_0$．設$\rho_t: E^m - p_0 \to E^m - p_0$是$E^m - p_0$到$\dot{E}^m$上的径向投射，并且定

[1] 实际上当L是空集时我們常使用这一定理。

又 $\theta_t: Q - q_0 \to Q - q_0$ 为 $\theta_t | Q - e^m = 1$, $\theta_t | \bar{e}^m - q_0 = g \rho_t g^{-1}$。由于 $\bar{e}^m - e^m = g(\dot{E}^m)$ 并且 $g\rho_t g^{-1}(g(p)) = g\rho_t(p) = g(p)$, $p \in \dot{E}^m$, θ_t 是单值的。如同在引理 1.5 的証明中那样，据此則 θ_t 是連續的，且自然地，$\theta_0 = 1$. 这样 $\theta_t f_0'$ 是 f_0' 的一个同伦并且 $\theta_1 f_0' \sigma^n \subset Q - e^m$. 此外，由于 $f_0' \dot{\sigma}^n \subset Q - e^m$, 則 $\theta_1 f_0' \sim f_0$, rel $\dot{\sigma}^n$.

这样，σ^n 的象可以由 Q 的每一个 m 維胞腔得出。如果 $m - 1 > n$, 这时我們重复这一过程，直到最后我們达到一个映象 f_1 使得 $f_1 \sim f_0: \sigma^n \to Q$, rel $\dot{\sigma}^n$ 并且 $f_1 \sigma^n \subset Q^n$.

設 $f_0, f_1: K \to P$ 是胞腔式的。如果对于所有的 n 和 t 都有 $f_t(K^n) \subset P^{n+1}$; 这时我們說一个同伦 $f_t: K \to P$ 是**胞腔式**的。

定理 1.9. 如果 $f_0 \sim f_1: K \to P$ 並且这同伦限制于 K 的一个子复合形 L 上时是胞腔式的，这时原同伦可以由一个胞腔式同伦代替，它是扩張于 L 上的胞腔式同伦。

这可以直接从定理 1.8 得出：替換該定理中的 K, L 为 $K \times I$, $K \times 0 \cup K \times 1 \cup L \times I$.

設 K 是一个局部連通的，并且是局部单連通的复合形，而 $\tilde{K}$ 是 K 的一个复盖空間。如同在 CHI 中所示明的，这一复盖空間可以使之作成一个胞腔复合形，事实上，如果 $p: \tilde{K} \to K$ 是复盖映象，則 $\tilde{K}$ 的每一个胞腔是由 p 同胚地映射到 K 的一个胞腔上。

定理 1.10. 如果 K 是一个 CW-复合形，則任何复盖 K 的 $\tilde{K}$ 也是 CW-复合形。

2. 一个复合形的 n 維型和麦賽譜同調. 設 f, g 是映 X 入 Y 的象。如果对于每一个映一个維数 $\leqslant n$ 的任意 CW-复合形 P 入 X 的映象 ϕ 有 $f\phi \sim g\phi$, 这时我們說 f 和 g 是 n **維同伦**的 ($f \overset{n}{\sim} g$). 我們也能这样的定义 n **維同伦型**：如果存在映象 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ 使得 $fg \overset{n}{\sim} 1$, $gf \overset{n}{\sim} 1$, 則說 X 与 Y 具有相同的 n 維同伦型。

現在設 K, L 是 CW-复合形。这时我們說 K 与 L 具有相同的 n 維同伦型，当而且仅当 K^n 和 L^n 是具有相同的 $(n-1)$ 維同伦型。

定理 2.1. 設 f_0, f_1 是一个 CW-复合形 K 到一个空間 X 上的

映象. 于是 $f_0 \overset{n}{\simeq} f_1$ 当且僅当 $f_0|K^n \sim f_1|K^n$.

条件的必要性显然. 現在設 ϕ 是一个映象映一个任意的CW-复合形 P^n 入 K. 据定理 1.8,

$$\phi \sim \phi': P^n \to K$$

且 $\phi' P^n \subset K^n$. 这样,如果

$$f_0|K^n \sim f_1|K^n \quad 則\ f_0\phi \sim f_0\phi' \sim f_1\phi' \sim f_1\phi.$$

定理 2.2. 如果 K, L 是具有相同的 n 維同伦型,則它們也具有相同的 m 維同伦型, $m \leqslant n$.

設 $f: K^n \to L^n$, $g: L^n \to K^n$ 使得 $fg_n\simeq_1 1$, $gf_n\simeq_1 1$. 据定理 1.8 我們可以假定 f, g 是胞腔式的, 且据定理 1.9, 可以进一步假定同伦

$$fg|L^{n-1} \sim 1: L^{n-1} \to L^n, \quad gf|K^{n-1} \sim 1: K^{n-1} \to K^n$$

是胞腔式的. 于是显然地, $f' = f|K^m$ 和 $g' = g|L^m$ 能使 $f'g'_m\simeq_1 1$, $g'f'_m\simeq_1 1$.

我們称这样的一个映象 f 是一个 n 維同伦等价而 g 是它的 n 維逆. 注意到我們能允許 n 取約定值 ∞, 在这一情形下, n 維同伦型和 n 維型与同伦型相合. 定理 2.2 于是説明了 n 維型是同伦型的一个不变量.

可以証明: 連通的 CW-复合形具有相同的 2 維型, 当且只当它們有同构的基本羣, S. 麦克伦和 J. H. C. 威脱海特在他們新近的一篇論文(*Proc. Nat. Acad. Sci., Wash.*, 36(1950, 1))中給出了 3 維型的一个代数特征. 波士特尼可夫(M. M. Постников)在更近的一篇論文[1]中給出了 n 維型(包括 $n = \infty$ 这样情形)的一个不变量全組.

仍旧依照 J. H. C. 威脱海特在 CHI 中所述的, 我們定义[2] 一个 J_m-复合形是作为这样的一个复合形, 于其中內射 $i: \pi_n(K^{n-1}) \to \pi_n(K^n)$ 映 $\pi_n(K^{n-1})$ 到 0, $n = 2, \cdots, m$.

定理 2.3. 作为一个 J_m-复合形的一个性質是 m 維型的一个

1) 見 Доклад Акад. Наук СССР, 76, 3; 76, 6;79, 4 (1951).

2) J. H. C. 威脱海特的定义实际上与这个不同,但如他所明确指出的,等价于它.

不变量.

事实上，設K是一个J_m-复合型，并且設$f: K^m \to L^m, g: L^m \to \to K^m$使得$fg_m \simeq_1 1$. 我們可以假定$f, g$是胞腔式的，因此它們导出同态

$\phi_n: i\pi_n(K^{n-1}) \to i\pi_n(L^{n-1})$, $\psi_n: i\pi_n(L^{n-1}) \to i\pi_n(K^{n-1})$, $n \leqslant m$.
我們也能把同伦$fg | L^{m-1} \sim 1: L^{m-1} \to L^m$取作是胞腔式的，因此$fg | L^{n-1}: L^{n-1} \to L^n$导出$i\pi_n(L^{n-1})$的一个自同构. 这样$\phi_n \psi_n$是一个自同构，因而$\phi_n$映$i\pi_n(K^{n-1})$到$i\pi_n(L^{n-1})$上. 因此，如果$K$是一个$J_m$-复合形，$L$亦是.

定理 2.4. 如果K是一个單連通的J_m-复合形，且$\omega_n: \pi_n(K) \to \to H_n(K)$是同伦羣到同調羣內的自然同态，則$\omega_n$，是一个同构(在上)，当$n \leqslant m$且$\omega_{n+1}$是在上时.

我們首先来作下面的观察，它的重要性絕不限于本定理. 因为，显然，如果$r \leqslant n-1$則

$$H_r(K^n, K^{n-1}) \text{ 和 } \pi_r(K^n, K^{n-1})$$

是零，且由于$\pi_1(K) = 0$，据第三章定理3.4，当扩张到胞腔复合形时，就得知存在$\pi_n(K^n, K^{n-1})$[1]到$H_n(K^n, K^{n-1})$上的自然同构. 因为后者是n次鏈羣，我們可以把

$$\pi_n(K^n, K^{n-1})$$

与K的n維鏈羣恆同起来. 事实上，我們把作为n次鏈羣的生成元e^n与它的特征映象$f: E^n, S^{n-1} \to K^n, K^{n-1}$的同調类恆同起来. 設$d_n: \pi_n(K^n, K^{n-1}) \to \pi_{n-1}(K^{n-1})$是同伦边緣同态并且設$j_{n-1}: \pi_{n-1}(K^{n-1}) \to \pi_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2})$是內射. 于是$\delta_n = j_{n-1} d_n: \pi_n(K^n, K^{n-1}) \to \pi_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2})$是同調边緣且$j\pi_{n-1}(K^{n-1})$是球面$(n-1)$維閉鏈.

我們現在来刻划出对于一个单連通复合形K的同态$\omega_n: \pi_n(K) \to H_n(K)$的特性. 直接由定理1.8得出內射$i_n: \pi_n(K^n) \to \to \pi_n(K)$是到$\pi_n(K)$上的，并且有內射$\pi_n(K^{n+1}) \to \pi_n(K)$是一个同构. 給定任意$\alpha \in \pi_n(K)$，我們可以把$\omega_n(\alpha)$当作是$j_n(i_n^{-1}(\alpha))$

1) 如果$n = 1$或2，我們使$\pi_n(K^n, K^{n-1})$为交换的.

的同调类.(注意,到此为止,我們只在单純复合形下对 ω_n 下定义).于是 ω_n 是单值的,因为,如果 $\beta\in i_n^{-1}(0)$,据正合性則有

$$\beta = d_{n+1}\gamma, \gamma\in\pi_{n+1}(K^{n+1}, K^n), \text{且 } j_n\beta = \delta_{n+1}\gamma .$$

这样在 $i_n^{-1}(\alpha)$ 中选择不同的元素会引起 $j_n(i_n^{-1}(\alpha))$ 在它的同調类中的改变. $j_n\eta$ 也是一个閉鏈,因为据正合性有 $\delta_n j_n = j_{n-1}(d_n j_n) = 0$.

現在我們来証明这个定理,就是指 K 是一个单連通 J_m-复合形. 由于內射

$$\pi_n(K^{n-1})\to\pi_n(K^n)$$

当 $n\leqslant m$ 是到 0 上的,据正合性,如果 $n\leqslant m$,則

$$j_n: \pi_n(K^n)\to\pi_n(K^n, K^{n-1})$$

是一个同构(在内). 这样,如果 $n\leqslant m+1$ 則

$$\delta_n^{-1}(0) = d_n^{-1}(j_{n-1}^{-1}(0)) = d_n^{-1}(0) = j_n\pi_n(K^n).$$

因此 j_n 映射 $\pi_n(K^n)$ 到 n 維閉鏈羣上,从而 ω_n 是到 $H_n(K)$ 上的,$n\leqslant m+1$.

現在設 $\omega_n\alpha = 0$, $n\leqslant m$. 于是存在 $\beta\in\pi_n(K^n)$ 使得 $i_n\beta = \alpha$ 和 $j_n\beta = \delta_{n+1}\gamma = j_n d_{n+1}\gamma$, $\gamma\in\pi_{n+1}(K^{n+1}, K^n)$. 由于 j_n 是同构的,$n\geqslant m$,据正合性我們就有 $\beta = d_{n+1}\gamma$,以及 $\alpha = i_n\beta = i_n d_{n+1}\gamma = 0$.

現在假定 $\pi_r(K) = 0$, $r = 1, \cdots, m-1$. 那末不难[1]看出,如果 e^0 是一个单独的点,映象 $f: K^m\to e^0$ 是一个 m 維等价. e^0 既然确定是一个 J_m-复合形,因此 K^m 也是,从而 K 也是. 这样我們得出:

定理 2.5 (对于胞腔复合形的希立維茲同构定理). 如果 K 是一个 CW-复合形使得 $\pi_r(K) = 0$, $r = 1, \cdots, n-1$, 則 ω_n: $\pi_n(K)\approx H_n(K)$ 且 ω_{n+1} 映射 $\pi_{n+1}(K)$ 到 $H_{n+1}(K)$ 上.

注意到定理 2.5 还給出有关 ω_{n+1} 的附加的知識是有趣的. 亦可以观察到,定理 2.4 严格地講較定理 2.5 更为普遍. 因为如果我們把 K 取作 $S^3\cup e^4$,其中对于 e^4 的特征映象在 S^3 上是具有度数 3,然后可以示明 K 是一个 J_5-复合形,但 $\pi_3(K)\neq 0$.

1) 例如,参看本章定理 3.6. 不过依据定理 1.6 也可得出一直接的初等証明.

定理 2.5 可以相对化如下:

定理 2.6. 如果K是一个 CW-复合形,L是一个子复合形使得$\pi_1(L)=0$, $\pi_r(K, L)=0$, $r=1, \cdots, n-1$, 则自然同态$\omega_n: \pi_n(K, L) \to H_n(K, L)$是一个同构(在上), 且$\omega_{n+1}$映射$\pi_{n+1}(K, L)$到$H_{n+1}(K, L)$上.

現在考虑一个 CW-复合形K的羣系$\{\pi_r(K^n, K^{n-1}); \pi_r(K^n)\}$和相对同态

$$d_r^n: \pi_r(K^n, K^{n-1}) \to \pi_{r-1}(K^{n-1}),$$

$$j_r^n: \pi_r(K^n) \to \pi_r(K^n, K^{n-1}),$$

$$i_r^n: \pi_r(K^n) \to \pi_r(K^{n+1}),$$

$$\delta_r^n = j_{r-1}^{n-1} d_r^n: \pi_r(K^n, K^{n-1}) \to \pi_{r-1}(K^{n-1}, K^{n-2}).$$

現在,由偶(K^n, K^{n-1})的同伦序列的正合性就有$d_r^n j_r^n = 0$, 因此

$$\delta_r^n \delta_{r+1}^{n+1} = j_{r-1}^{n-1} d_r^n j_r^n d_{r+1}^{n+1} = 0.$$

这样我們就对于$(r-n)$的每一个定值得出一个基于"鏈"羣$\pi_r(K^n, K^{n-1})$的同調論. 如果$r-n<0$, 羣$\pi_r(K^n, K^{n-1})$自然都是零;如果$r=n$且K是单連通的, 我們得到K的通常的同調論. 設H_r^n是"基于"鏈羣$\pi_r(K^n, K^{n-1})$的同調論, 并且設$\Gamma_r^n = i_r^{n-1}\pi_r(K^{n-1}) \subset \pi_r(K^n)$. 我們注意到, 如果$r-n<0$, 则$\pi_r(K^n) = \pi_r(K)$, 且如果$r=n$, 则$\Gamma_r^{n+1} = \pi_r(K)$.

在現阶段画出代表羣$\pi_r(K^n, K^{n-1})$, $\pi_r(K^n)$以及有关的同态的图解是方便的.

$$\begin{array}{ccccccccc}
& & \cdots \to \pi_r(K^{n-1}) & \to & \pi_r(K^{n-1}, K^{n-2}) & \to & \pi_{r-1}(K^{n-2}) \to & & \\
& & \downarrow i_r^{n-1} & & & & \downarrow i_{r-1}^{n-2} & & \\
\pi_{r+1}(K^{n+1}, K^n) & \xrightarrow{d_{r+1}^{n+1}} & \pi_r(K^n) & \xrightarrow{j_r^n} & \pi_r(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{d_r^n} & \pi_{r-1}(K^{n-1}) & \xrightarrow{j_{r-1}^{n-1}} & \pi_{r-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) \\
& & \downarrow i_r^n & & & & \downarrow i_{r-1}^{n-1} & & \\
& & \cdots \to \pi_r(K^{n+1}) & \xrightarrow{j_r^{n+1}} & \pi_r(K^{n+1}, K^n) & \xrightarrow{d_r^{n+1}} & \pi_{r-1}(K^n) & \xrightarrow{j_{r-1}^n} & \pi_{r-1}(K^n, K^{n-1}) \\
& & \downarrow & & & & \downarrow & &
\end{array}$$

我們現在来定义几个同态$\lambda_r^n: \Gamma_r^n \to \Gamma_r^{n+1}$它們由$\lambda_r^n(\alpha) = i_r^n(\alpha)$, $\alpha \in \Gamma_r^n$; $\mu_r^{n+1}: \Gamma_r^{n+1} \to H_r^n$和$\nu_r^n: H_r^n \to \Gamma_{r-1}^{n-1}$所給出;如果$\beta \in \Gamma_r^{n+1}$

而 $\beta = i_r^n(\gamma)$, $\gamma \in \pi_r(K^n)$, 我們就定义 $\mu_r^{n+1}(\beta)$ 为 $j_r^n(\gamma)$ 的同調类. 正如在已經考虑过的 $r = n$ 的情形中，这就得出 μ_r^{n+1} 是单値的. 如果 $\alpha \in H_r^n$ 且 $z, \in \pi_r(K^n, K^{n-1})$, 是类 α 中的一个"閉鏈"，我們就定义 $\nu_r^n(\alpha)$ 为 $d_r^n(z)$. 我們観察到，由于 $j_{r-1}^{n-1} d_r^n(z) = 0$, 从而 $d_r^n(z) \in (j_{r-1}^{n-1})^{-1}(0) = i_{r-1}^{n-2}\pi_{r-1}(K^{n-2})$, 据正合性，$= \Gamma_{r-1}^{n-1}$; 且同时如果 $z = j_r^n d_{r+1}^{n+1}(y)$, $y \in \pi_{r+1}(K^{n+1}, K^n)$, 則

$$d_r^n(z) = d_r^n j_r^n d_{r+1}^{n+1}(y) = 0,$$

因此 ν_r^n, 如断言过的，是 H_r^n 到 Γ_{r-1}^{n-1} 内的一个同态.

这样我們得到下面的"导出的"图解：

$$\begin{array}{ccccccc}
\Gamma_r^n & \xrightarrow{\mu_r^n} & H_r^{n-1} & \xrightarrow{\nu_r^{n-1}} & \Gamma_{r-1}^{n-2} & \to \\
\downarrow{\scriptstyle \lambda_r^n} & & & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{r-1}^{n-2}} & \\
\Gamma_r^{n+1} & \xrightarrow{\mu_r^{n+1}} & H_r^n & \xrightarrow{\nu_r^n} & \Gamma_{r-1}^{n-1} & \to \\
\downarrow{\scriptstyle \lambda_r^{n+1}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{r-1}^{n-1}} & \\
\Gamma_r^{n+2} & \xrightarrow{\mu_r^{n+2}} & H_r^{n+1} & \xrightarrow{\nu_r^{n+1}} & \Gamma_{r-1}^n & \to
\end{array}$$

定理 2.7. 羣以及同态的一个序列 $\cdots \to \Gamma_r^n \to H_r^{n-1} \to \to \Gamma_{r-1}^{n-2} \to \Gamma_{r-1}^{n-1} \to \cdots$ 是正合的.

我們同意只于 H_r^n 处証明正合性，这也就是說，我們将証明 $(\nu_r^n)^{-1}(0) = \mu_r^{n+1}\Gamma_r^{n+1}$.

設 $\alpha \in \Gamma_r^{n+1}$; 則 $\mu_r^{n+1}(\alpha)$ 是 $j_r^n(\beta)$, $\beta \in \pi_r(K^n)$, 中的类，这里 $\alpha = i_r^n(\beta)$. 因此，由定义，$\nu_r^n \mu_r^{n+1}(\alpha) = d_r^n j_r^n \beta = 0$. 相反，設 $\alpha \in H_r^n$ 并且設 $\nu_r^n(\alpha) = 0$. 于是 $d_r^n(z) = 0$, 这里 z 是在类 α 中，因而 $z = j_r^n(y)$, $y \in \pi_r(K^n)$, 因而 $\alpha = \mu_r^{n+1}(\beta)$, 其中 $\beta = i_r^n(y)$.

类似的論証可以确立序列的正合性. 如此，在导出图解中的情境在代数上便类似于原始的图解，而我們可以通过一个类似的构造得到"第二个导出的"图解，且可以依此类推. 这样我們得出了这种图解的一个序列，叫作麦賽譜同調[1]. 这是由 W. S. 麦賽所

1) 麦賽譜同調提供了一个应用李劳埃-柯斯齐尔 (Leroy-Koszul) 譜同調論的例子 (參看 J. P. Serre, *Ann. Math.*, 54 (1951), 425—505, 第一章).

得出的．导出的图解都是同伦不变量．此外，第一个导出图解的子图解，它由羣Γ_r^n，$n \leqslant m$，和H_r^n，$n < m$，以及有关的同态組成，是m維型的一个不变量．对于以后誘导出的图解亦都如此．

如果我們由第一个导出的图解中摘出"經过"H_n^n的正合序列，并且我們还以H_n，π_n，Γ_n代替記号H_n^n，Γ_n^{n+1}，Γ_n^n，我們得到正合序列

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1} \xrightarrow{\nu_{n+1}} \Gamma_n \xrightarrow{\lambda_n} \pi_n \xrightarrow{\mu_n} H_n \xrightarrow{\nu_n} \cdots, \qquad (2.8)$$

其中我們亦对同态的名称作了适当的改动．这就是組成 J. H. C. 威脫海特[1]的論文称作"某一正合序列"的主題的正合序列．

羣π_n是K的n次同伦羣，$\pi_n(K)$．如果K是单連通的，则H_n是K的n次整数同調羣，而μ_n是$\pi_n(K)$到$H_n(K)$内的自然同态．亦可看出一个J_m-复合形正是一个在其中$\Gamma_n = 0$，$n = 1, \cdots, m$，因此序列的正合性就为定理 2.4 提供了一个直接的証明．同态ν_n威脫海特称它为**第二边緣运算**．

如果K不是单連通的，H_n可以解释作$H_n(\tilde{K})$，其中$\tilde{K}$是K的万有复迭复合形．有自然同态$\Gamma_n(\tilde{K}) \to \Gamma_n(K)$，$\pi_n(\tilde{K}) \to \pi_n(K)$ $(n \geqslant 2)$存在．

3. 实現定理． 假定X和Y是任意两个弧式連通的拓扑空間，且f是X到Y内的一个映射．于是f导出同态$f_n^*: \pi_n(K) \to \pi_n(Y)$．我們說$f_n^*$是被$f$**几何地实現**．几何实現的重要性已經由 J. H. C. 威脫海特和其他一些人的結果而見加強．在本节中我們将給出其中的一些基本結果[2]．

我們首先給出具有同构的同伦羣的两个空間X和Y的一个例子，但它們不具有相同的同伦型．对于X我們取作为 2 維球S^2；对于Y我們取作为 3 維球S^3和M的拓扑积，M是"无限維的复射影

---

1) 見本章末尾所附的参考資料．在这篇論文里，威脫海特証明了，例如，如果K是单連通的且$\dim K \leqslant 4$，則起首为H_4的那一部分序列是同伦型的一个代数等价．他还証明了若干有关"实現"方面的定理(参看这一章的第三节)．

2) 所有这些結果都采自 CHI 一书中，但我們不以同样的普遍性来陈述我們的定理．

空間",定义如下:

在第五章 §2 中我們曾引进 $(n-1)$ 复数維数的复射影空間 M_n. 将 M_k 中的点 $[z_1, z_2, \cdots, z_k]$ 和 M_n 中的点 $[z_1, z_2, \cdots, z_k, o, \cdots, o]$ $(k < n)$ 恆同起来，我們就可以把 M_k 嵌入 M_n 中，于是 $M = \bigcup_n M_n$，而我們給 M 以弱拓扑結构，从而 $X \subset M$ 是閉的当且仅当 $X \cap M_n$ 对于每一个 n 是閉的. 可以示明 M 容許胞腔分解 $e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cdots \cup e^{2n} \cup \cdots$，这里 $M^{2n} = M_{n+1}$，并且 e^{2n} 是由纤維映象 $f: S^{2n-1} \to M_n$ 附加到 M_n. 于是 $\pi_r(M) \approx \pi_r(M^{2r}) = \pi_r(M_{r+1})$，且如果 $r \geqslant 3$，据第五章定理 2.6，則 $\pi_r(M_{r+1}) \approx \pi_r(S^{2r+1})$. 同时 $\pi_1(M) = \pi_1(S^2) = 0$，且再依据第五章定理 2.6，則 $\pi_2(M) \approx \pi_2(M_3) = Z_\infty$. 如此 M 的同伦羣是由 $\pi_r(M) = 0$，$r \neq 2$ 和一个无限循环羣 $\pi_2(M) = Z_\infty$ 所給出. 如果 $Y = S^3 \times M$，据第四章定理 6.1，則

$$\pi_r(Y) \approx \pi_r(S^3) + \pi_r(M).$$

因为，依据第五章定理 2.1，$\pi_r(S^3) \approx \pi_r(S^2)$，$r \geqslant 3$，且由于 $\pi_1(S^3) = \pi_1(S^2) = 0$ 和 $\pi_2(S^2) = Z_\infty$，就得出：如果 $X = S^2$，則对于所有的 r，$\pi_r(X) \approx \pi_r(Y)$. 另一方面，$Y$ 显然具有一个非边緣的 3 維閉鏈（S^3 上的基本 3 維閉鏈），因此 X 和 Y 的同調羣是不同构的. 由于同調羣是同伦型的不变量，从而 X 与 Y 提供了所需要的类型的一个例子.

在这一例子里，根本論点在于 X 和 Y 的同伦羣的同构是"抽象的"而不允許有几何实現. 这由下面的定理得出:

定理 3.1. 如果 $f: K \to L$ 是 CW-复合形 K 到 CW-复合形 L 内的一个映象,导出同构

$$f_r^*: \pi_r(K) \approx \pi_r(L),\ r = 1, 2, \cdots, \max(\dim k, \dim L),$$

則 f 是一个同伦等价.

(注意这个定理包括了 $\dim K$ 或 $\dim L = \infty$ 的情形).

我們要給出这个定理的証明,因为它引进了映射柱的概念,并且显示了使用 CW-复合形較单純复合形有許多优点. 不过,我們

在这一証明之前对迭合拓扑作某些陈述.

設X是一个拓扑空間，Y是一个（沒有拓扑化的）点集与X不相交，且f是一个X到Y上的变換. 我們說，X的一个子集X_0关于f是浸潤的，如果$f^{-1}f(X_0)=X_0$. 这时我們說，当我們命定Y的閉子集为X的浸潤的閉子集的象时，我們便給Y以由f决定的迭合拓扑結构. 这自动地使得f連續. 我們注意，如果f是連續的，則Y的閉子集必需是X的浸潤閉子集. 这样我們就給Y以与f的連續性一致的最大个数的閉子集. 如果X是一个紧致空間，Y是一个豪斯道夫空間并且f是X到Y上的一个映象，于是Y有由f决定的迭合拓扑結构；因为X的任意的閉子集的象在Y中是閉的. 这样，如果e^n是胞腔复合形K的一个胞腔，則$\bar{e}^n$有由特征映象$h: E^n \to \bar{e}^n$决定的迭合拓扑結构.

我們說一个集合X上的一个拓扑結构T比一个拓扑結构T'（在同一个集合上）較弱，如果在T'下的X的閉子集在T下也是閉的. 于是在X上的最弱的[1]拓扑結构是离散拓扑，而最強的是这样的一个于其中仅有的閉子集是X本身和空集. 根据这一定义，迭合拓扑可以刻画为与映象f的連續性一致的最弱拓扑. 应該注意到这一定义給出了一个胞腔复合形的弱拓扑結构的意义.

現在設f是X到Y内[2]的一个映象. 我們作一个空間$(X\times I)\cup Y$，如果Y倘沒有与$X\times I$分离，就以Y的适当的同胚象来代替. 我們同时作一个集合$X\cup Y\cup(X\times(0,1))$，如果$X, Y, X\times(0,1)$倘沒有分离，我們就代以它們的同胚象. 置$g(x,0)=x, x\in X, g(x,1)=f(x), g(x,t)=(x,t), t\in(0,1)$, $g(y)=y, y\in Y$，我們定义$(X\times I)\cup Y$到$X\cup Y\cup X\times(0,1)$上的一个变換g. 如果Z是这样的拓扑空間，它是由給集合$X\cup Y\cup(X\times(0,1))$以$g$所决定的迭合拓扑而得到的，于是我們描述$Z$为映象$f: X\to Y$的映射柱. 容易看出$X$和$Y$作为$Z$的閉子集而保留它們的拓扑結构. 从我們的观点看来，引进空間Z的用处

---

1) 应該注意这里的用法和在分析上（例如弱收斂，強收斂）的用法相反.

2) 不必要在上.

在于这样的事实，它包含X作为它的一个子空間，它的用处还在于下面的定理：

定理 3.2. Y是Z的一个形变收縮核.

（这当然蘊含着恆等映象$i: Y \to Z$是一个同伦等价）.

本定理的証明依賴于下面的三个引理：

引理 3.3. 如果Y有由$f: X \to Y$决定的迭合拓樸結果而且g是X到Z內的一个映象的話，則变換$gf^{-1}: Y \to Z$当它是單值时一定是連續的[1].

我們首先証明，如果Z_0是Z的任意子集，則

$$(gf^{-1})^{-1}(Z_0) = f(g^{-1}(Z_0)).$$

为此設$y \in (gf^{-1})^{-1}(Z_0)$. 于是$gf^{-1}(y) = z \in Z_0$, 因此$f^{-1}(y) \subset \subset g^{-1}(z)$, 或$y \in f(g^{-1}(z)) \subset f(g^{-1}(Z_0))$.反之，設$y \in f(g^{-1}(Z_0))$. 于是$y = f(x)$, $g(x) = z$, 对某一$x \in X$, $z \in Z_0$. 这样$x \in f^{-1}(y)$, $z \in g(f^{-1}(y))$, 所以$z = gf^{-1}(y)$，因为gf^{-1}是单值的. 从而有

$$y \in (gf^{-1})^{-1}(z) \subset (gf^{-1})^{-1}(Z_0).$$

这一論証同时也示明$g^{-1}(Z_0)$关于f是浸潤的. 因为如果$y \in (gf^{-1})^{-1}(Z_0)$, 則$f^{-1}(y) \subset g^{-1}(Z_0)$. 因此

$$f^{-1}((gf^{-1})^{-1}(Z_0)) = f^{-1}(f(g^{-1}(Z_0)) \subset g^{-1}(Z_0),$$

从而$f^{-1}(f(g^{-1}(Z_0)) = g^{-1}(Z_0)$.

現在設Z_0在Z內是閉的. 于是$g^{-1}(Z_0)$是X的一个浸潤閉集，因此$f(g^{-1}(Z_0))$在Y內是閉的. 这样如果Z_0是閉的，則$(gf^{-1})^{-1}(Z_0)$是閉的，从而gf^{-1}是連續的.

引理 3.4. 如果Y有由$f: X \to Y$决定的迭合拓樸結构並且$F: X \times I \to Y \times I$由$F(x,t) = (f(x), t), x \in X, t \in I$所給定，則$Y \times I$有由$F$所决定的迭合拓樸結构.

我們首先注意到迭合拓扑結构亦可以由这样的特性来刻划：它的集合是开的当而且只当它們是浸潤开集合的象（因为，如果我們把那些閉集合最大化，我們也最大化了开集合）. 在引理的証明

1) 在引理1.5的証明中我們曾用到本引理的一个特殊情形。引理中的X,Y,Z自然不是3.2中的那些。

中用这样一个特性較方便些.

設G是$X \times I$的一个浸潤开集，因此$F^{-1}(F(G))=G$. 我們希望示明$F(G)$在$Y \times I$内是开的. 設$(y_0, t_0) \in F(G)$,并且設$(x_0, t_0) \in G$使得$f(x_0)=y_0$. 設T代表所有的使得$(x_0, t) \in G$的$t \in I$的集合(非空的). T显然是一个包含t_0的开集，且我們可以选择一个开集T_0使得$t_0 \in T_0$, $\overline{T}_0 \subset T$. 于是$x_0 \times \overline{T}_0 \subset G$. 我們可以找到一个开集$V(x_0)$，含有$x_0$，且使得$V(x_0) \times \overline{T} \subset G$. 因为对于每一个$t' \in \overline{T}_0$，我們可以选择开集[1] $V'(x_0)$, $U(t')$使得$x_0 \in V'(x_0)$, $t' \in U(t')$且$V'(x_0) \times U(t') \subset G$. 由于$\overline{T}_0$是紧致的，集合$\{U(t')\}$的一个有限个数，設作$U(t_1), \cdots, U(t_n)$，复盖$\overline{T}_0$. 如果$x_0$的对应邻域是$V_1(x_0), \cdots, V_n(x_0)$，則$V_1(x_0) \cap \cdots \cap V_n(x_0)$是一个开集$V(x_0)$，含有$x_0$且使得$V(x_0) \times \overline{T}_0 \subset G$.

現在

$$F(V(x_0) \times \overline{T}_0) = fV(x_0) \times \overline{T}_0,$$

且

$$F^{-1}(F(V(x_0) \times \overline{T}_0) = f^{-1}(fV(x_0)) \times \overline{T}_0.$$

由于$V(x_0) \times \overline{T}_0 \subset G$，所以$F^{-1}(F(V(x_0) \times \overline{T}_0)) \subset F^{-1}(F(G)) = G$，因为$G$是浸潤的. 这样$f^{-1}(fV(x_0)) \times \overline{T}_0 \subset G$.

設我們定义$W(x_0)$为最大的开集，含有x_0，使得$W(x_0) \times T_0 \subset G$. 更精确一些，$W(x_0)$是$x_0$的所有的邻域$V(x_0)$的并集，这些邻域具有性质

$$V(x_0) \times \overline{T}_0 \subset G.$$

我們証明$f^{-1}(fW(x_0)) = W(x_0)$. 因为，如果不然，設

$$x \in f^{-1}(fW(x_0)), \; x \notin W(x_0).$$

于是$x \times \overline{T}_0 \subset G$，因此存在一个开集$V(x)$，含有$x$，且使得$V(x) \times \overline{T}_0 \subset G$. 于是$(W(x_0) \cup V(x)) \times \overline{T}_0 \subset G$，相反于$W(x_0)$的定义. 这样$W(x_0)$是$X$中的一个浸潤开集，因此$fW(x_0)$在$Y$内是开的. 由于$W(x_0) \times T_0 \subset G$，所以$fW(x_0) \times T_0 = F(W(x_0) \times T_0) \subset F(G)$，并且是一个包含有$(y_0, t_0)$的一个开集合. 这样

1) 开集合$U(t')$不必要包含于$\overline{T}_0$内，虽然坚持它們必需如此也无妨碍.

$F(G)$是开的而引理得以証明.

引理 3.5. 如果 Y 有由 $f: X \to Y$ 决定的迭合拓扑結构而且 g_t 是 X 到 Z 內的映象的一个同伦，則同伦 $g_t f^{-1}: Y \to Z$ 如果是單值的話就一定是連續的.

这是引理 3.3 和 3.4 的一个直接結果.

我們現在回到定理 3.2 的証明上来. 設

$$\theta_t: (X \times I) \cup Y \to (X \times I) \cup Y$$

是由 $\theta_t | Y = 1$, $\theta_t(x, t') = (x, t + t' - tt')$, $x \in X$, $t' \in I$ 所給定的形变. 給定迭合映象 $g: X \times I \cup Y \to Z$, 定义同伦 $\eta_t: Z \to Z$ 为 $\eta_t = g\theta_t g^{-1}$. 于是 η_t 是单值的. 因为 θ_t 在 $(X \times I) \cup Y$ 上是恆等映象，所以 η_t 是 Y（作为 Z 的一个子集）上的恆等变换；$\eta_t(x) = (x, t)$, $0 < t < 1$, $\eta_0(x) = x$, $\eta_1(x) = f(x)$, $x \in X$（作为 Z 的一个子集）；并且 $\eta_t(x, t') = (x, t + t' - tt')$, $0 \leqslant t < 1$, $0 < t' < 1$, $\eta_1(x, t') = f(x)$, $0 < t' < 1$. 因此，据引理 3.5, η_t 是連續的. 显然地 $\eta_0 = 1$, $\eta_t | Y = 1$, $\eta_1 Z = Y$. 这样 Y 是 Z 的一个形变收縮核，而 η_t 是一个形变收縮.

我們用映射柱的方法来証明定理 3.1，这里我們把空間 X, Y 特定作 CW-复合形 K, L 而且我們保留記号 Z 为 $f: K \to L$ 的映射柱. 我們已經示明 L 是 Z 的一个形变收縮核且 η_t 是一个形变. 我們希望示明，在本定理的这一特殊假定下，恆等映象 $i: K \to Z$ 是一个同伦等价.

不失一般性，我們可以假定 f 是胞腔式的（因为，否則的話，我們只需以胞腔式的一个同伦的映象来代替它）. 于是 Z 能够給以一个胞复合形的构造，它的胞腔是 K 和 L 的那些以及胞腔 $e^n \times \times (0, 1)$，其中 e^n 是 K 的一个胞腔. $K \times I$ 和 L 旣是 CW-复合形，不难[1]示明 Z 是一个 CW-复合形，而且这也正是在前面所以引进 CW-复合形的有决定性的事实.

現在設 $i: K \to Z$ 是恆等映象. 然后，定义 $\rho: Z \to L$ 为

1) 假如 K, L 是单純复合形，Z 的三角剖分將带来麻煩. 关于 Z 是一个 CW-复合形的証明，見 CHI 一书中 235 頁.

$\rho(z)=\eta_1(z)$, $z\in Z$, 我們看到 ρ_i: $K\to L$ 只是映象 f. 由于 ρ 是一个同伦等价，并且由于 f 得出同构 f_r^*: $\pi_r(K)\approx\pi_r(L)$, $r=1, 2, \cdots, N=\max(\dim K, \dim L)$, 从而[1] i 导出同构 i_r: $\pi_r(K)\approx\pi_r(Z)$, $r=1, 2, \cdots, N$. 从偶(Z, K)的同伦序列的正合性有 $\pi_r(Z, K)=0$, $r=1, \cdots, N$. 据此恆等映象 $Z\to Z$ 是相对于K的同伦于[2]一个映象 h: $Z\to Z$, 使得 $h(Z^N)\subset K$. 如果 $\dim K<\dim L$ (或者如果 $\dim K=\infty$), h 本身是Z到K上的一个保核收縮. 否則 $\dim K=N$ 且 $\dim Z=N+1$, Z 的$(N+1)$維胞腔是胞腔 $e^N\times(0, 1)$, $e^N\subset K$. 考虑胞腔 $e^N\times(0, 1)$. 設 k: $E^{N+1}, \dot{E}^{N+1}\to Z, Z^N$ 是对于这一胞腔的一个特征映象，并且考虑映象 hk: $E^{N+1}, \dot{E}^{N+1}\to Z, K$. 由于 i_N 同构地映射 $\pi_N(K)$ 到 $\pi_N(Z)$ 上，并且由于映象 $hk|\dot{E}^{N+1}$ 有一个扩张到一个映 E^{N+1} 入Z的映象，从而 $hk|\dot{E}^{N+1}$ 有一个扩张到一个映 E^{N+1} 入K的映象，設为 s: $E^{N+1}\to K$. 定义 h^*: $Z^N\cup e^N\times(0, 1)\to K$ 为 $h^*|Z^N=h$, $h^*|\overline{e^N\times(0, 1)}=sk^{-1}$. 显然 $h^*|\overline{e^N\times(0, 1)}$ 是单值的因而（例如，据引理 3.3）是連續的. 我們可以在这一方法下于Z的所有的$(N+1)$維胞腔上扩张$h|Z^N$, 得到一个保核收縮，它据定理 1.3 是連續的. 注意到 $h^*|K=1$.

又由于 $\pi_r(Z, K)=0$, $r=1, \cdots, N$, 恆等映象 j: $L\to Z$ 是变形入 j': $L\to K$. 这样如果我們首先以 η_t 把Z变形到L上，然后变形L到K内，我們得到Z到K内的一个形变. 这样

$$\eta_0\sim\eta_1=j\rho\sim j'\rho=ih^*j'\rho\sim ih^*: Z\to Z;$$

由于 $h^*|K=1$, 且当然 $\eta_0=1$, 这就示明 i: $K\to Z$ 是一个同伦等价. 因此 $\rho i=f$: $K\to L$ 是一个同伦等价，而定理 3.1 得以証明. 可以注意到 h^*j: $L\to K$ 是 f 的一个同伦逆. 同时值得看到的是，設或我們給定的映象 f: $K\to L$ 导出 $\pi_r(K)$到 $\pi_r(L)$ 上的同构, $r=1, \cdots, M-1$, 并且給定了 $\pi_M(K)$到 $\pi_M(L)$ 上的一个同

1) 回忆一下我們允許有 $N=\infty$.

2) 据定理 1.7 和接随着的說明. 注意到

$$\dim Z=\max((\dim K)+1, \dim L).$$

态，$M = \max((\dim K)+1, \dim L)$，則本定理的証明将变得比較容易．

定理 3.6. 如果 $f: K \to L$ 导出 $f_r: \pi_r(K) \approx \pi_r(L)$，$r = 1, \cdots, N-1$，$N = \max(\dim K, \dim L)$，則 f 是一个 N 維等价．

本定理可以在十分类似定理 3.1 的情况下来証明，与那不同的只当 $N < \infty$ 时．假定它成立，并且采用上一定理証明中的記号，設 $Z_0^N \subset N$ 是在迭合映象 $g: K \times I \cup L \to Z$ 下

$$(K^{N-1} \times I) \cup L$$

的象．由于

$$(K^{N-1} \times I) \cup (K \times I)$$

是 $K \times I$ 的一个收縮核，从而 Z_0^N 是 Z 的一个收縮[1]核．設 θ 是保核收縮．如前，現在我們可以証明存在 $\rho: Z^N \to K$ 且 $\rho|K = 1$，并且[2] $\rho|Z^{N-1} \sim 1: Z^{N-1} \to Z^N$．于是 $\rho\theta: Z \to K$ 是 $i: K \to Z$ 的一个 N 維逆．因为

$$\rho\theta i|K^{N-1} = 1, \; i\rho\theta|Z^{N-1} = i\rho|Z^{N-1} \sim 1|Z^{N-1}.$$

这样 $i: K \to Z$ 是一个 N 維等价，从而 $f: K \to L$ 是一个 N 維等价．

現在設 $f: K \to L$ 是一个胞腔式映象并且选定頂点 $x_0 \in K$，$y_0 \in L$ 且 $f(x_0) = y_0$．設 $\tilde{K}, \tilde{L}$ 是 K, L 的万有复盖复合形并且选定 $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0$ 各在 x_0, y_0 上．于是有一个唯一的映象 $\tilde{f}: \tilde{K} \to \tilde{L}$ 使得 $p\tilde{f} = fp$，且 $\tilde{f}\tilde{x}_0 = \tilde{y}_0$，这里我們用 p 去指明投射 $\tilde{K} \to K$，$\tilde{L} \to L$．設 $\tilde{f}$ 导出 $\tilde{f}_r: H_r(\tilde{K}) \to H_r(\tilde{L})$．这时我們說 $\tilde{f}_r$ 是由 $f: K \to L$ 导出．

定理 3.7. 如果 $f: K \to L$ 导出

$$f_1: \pi_1(K) \approx \pi_1(L), \quad \tilde{f}_r: H_r(\tilde{K}) \approx H_r(\tilde{L}), \quad r = 2, 3, \cdots,$$

則 f 是一个同伦等价．

---

1) 如果 $\sigma: (K \times I) \cup L \to (K^{N-1} \times I) \cup (K \times I) \cup L$ 是一个收縮核，則

$$g\sigma g^{-1}: Z \to Z_0^N$$

是一个保核收縮．从引理 3.3，$\theta = g\sigma g^{-1}$ 的連續性乃是当然．

2) 当 ρ 是一个到 K 内的映象时，我們說 $i\rho|Z^{N-1} \sim 1: Z^{N-1} \to Z^N$ 要更为正确些．这一观点在下面就会明白，

內射 $K \to Z$, $L \to Z$ 导出同构

$$\pi_1(K) \approx \pi_1(Z), \pi_1(L) \approx \pi_1(Z).$$

这样如果 $\tilde{Z}$ 是 Z 的万有复盖，它可以認作是包含 $\tilde{K}$ 和 $\tilde{L}$. 然后用偶 $(\tilde{Z}, \tilde{K})$ 的同調序列，我們可以示明对于所有的 n $H_n(\tilde{Z}, \tilde{K}) = 0$，从而，据第三章定理 3.3，$\pi_n(\tilde{Z}, \tilde{K}) = 0$ (对所有 n). 据第五章定理 1.8，这蘊含着 $\pi_n(Z, K) = 0$ (对所有 n)；由这一点进行証明如同定理 3.1.

定理 3.8. 如果 K, L 是單連通的並且 $f: K \to L$ 导出 $f_r: H_r(K) \approx H_r(L)$, $r = 2, 3, \cdots$, 則 f 是一个同伦等价.

因为在这一情形 K 和 L 是它們本身的万有复盖.

在相对化上进一步的結果，可参看 J. H. C. Whitehead, "Combinatorial homotopy, II", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55, 5 (1949), 453—496; "A certain exact sequence", *Ann. Math.*, 52, 1 (1950), 51—110.

第八章　复合形的同伦羣

1. 問題的陈述. 在这最后的一章里，我們要研究同伦論中的一个特殊問題的一个特别簡单的情形．这一問題乃是去計算CW-复合形的同伦羣；而由于这样的計算必需基于球上的同伦羣的一些知識，因此我們将限于那些有关的球上的同伦羣为已知的情形．事实上，我們研究的主要目的是用K的同調示性数来决定，$\pi_{n+1}(K)$，其中K是一个有限胞腔复合形，它的起始$(n-1)$个同伦羣是零．此外，为簡单起見，我們可以取$n>2$．比較困难的情形$n=2$，已由J. H. C. 威脫海特于他的論文"A certain exact sequence"中，*Ann. Math.*, 52, 1 (1950), 51—110頁中解决．我們以上述論文的方法为基础来进行論述，且只是由于取了$n>2$使得問題簡化；但同时我們也給出了一个与作者[1]稍微不同的进行方式，而这基本上溯源于J. H. C. 威脫海特一篇早期的論文"The homotopy type of a special kind of polyhedron", *Ann. Soc. Polon. Math.*, 21 (1948), 176—186．最后，我們将指出K的較高次同伦羣的計算方法的可能扩张．

我們希望強調一下，选择有关同伦論应用的这个"例子"是因为作者对于它的熟識，而不是由于它必需在同伦論中占据一个中心位置．虽然如此，当同伦羣的計算規律能够給出时，同伦羣的引入拓扑学就有了进一步的理由，因此我們的动机是給本章論述的工作提供准备．

2. 威脫海特的正合序列. 我們重新提及第七章(2.8)的一个单連通的CW-复合形的正合序列，卽

1) 見*Quart. J. Math.*, Oxford (2), 1 (1950), 209—309. 継J. H. C. 威脫海特之后，作者参考一个复合形具有K的性质正如一个A_n^2-多面体．

$$\cdots \rightarrow H_{r+1}(K) \xrightarrow{\nu_{r+1}} \Gamma_r(K) \xrightarrow{\lambda_r} \pi_r(K) \xrightarrow{\mu_r} H_r(K) \rightarrow \cdots. \quad (2.1)$$

我們同时回想到$\Gamma_r(K)=i_r\pi_r(K^{r-1})\subset\pi_r(K^r)$. 取$\pi_r(K^r,K^{r-1})$为$K$的$r$次鏈羣. 边緣运算

$$\delta_r:\pi_r(K^r, K^{r-1}) \rightarrow \pi_r(K^{r-1}, K^{r-2})$$

是$j_{r-1}d_r$, $r>2$ (并且d_r, $r=2$), 其中d_r是同伦边緣$d_r:\pi_r(K^r, K^{r-1})\rightarrow\pi_{r-1}(K^{r-1})$且$j_{r-1}$是內射$j_{r-1}:\pi_{r-1}(K^{r-1})\rightarrow\pi_{r-1}(K^{r-1},K^{r-2})$. 最后,我們要記起第七章中$\nu_{r+1}$, λ_r以及μ_r的定义.

設$z\in Z_{r+1}(K)$, 它是一个$(r+1)$維閉鏈羣,并且設$[z]$是它的同調类. 于是$d_{r+1}(z)\in i_r\pi_r(K^{r-1})=\Gamma_r(K)$,并且我們定义$\nu_{r+1}[z]=d_{r+1}[z]$. 如果$x\in\Gamma_r(K)$, 于是$\lambda_r(x)$是$x$在內射$k_r:\pi_r(K^r)\rightarrow\pi_r(K)$下的象. 給定$y\in\pi_r(K)$, 設$y'\in\pi_r(K^r)$选自$k_r^{-1}(y)$中. 于是$\mu_r(y)=[j_r(y')]$.

我們假定$\pi_r(K)=0$, $r=1,\cdots,n-1$. 于是,如第七章中所示明的, $\mu_n:\pi_n(K)\approx H_n(K)$和$\mu_{n+1}$映射$\pi_{n+1}(K)$到$H_{n+1}(K)$上. 我們从(2.1)中抽出子序列

$$H_{n+2}(K) \xrightarrow{\nu_{n+2}} \Gamma_{n+1}(K) \xrightarrow{\lambda_{n+1}} \pi_{n+1}(K) \xrightarrow{\mu_{n+1}} H_{n+1}(K) \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

定理 2.3. $\pi_{r+1}(K)$是$H_{n+1}(K)$的对于

$$\Gamma_{n+1}(K)-\nu_{n+2}H_{n+2}(K)$$

的一个扩張[1].

μ_{n+1}映射$\pi_{n+1}(K)$到$H_{n+1}(K)$上且核为$\lambda_{n+1}\Gamma_{n+1}(K)$. 現在$\lambda_{n+1}$映射$\Gamma_{n+1}(K)$到$\lambda_{n+1}\Gamma_{n+1}(K)$上且核是$\nu_{n+2}H_{n+2}(K)$, 因此$\lambda_{n+1}$导出一个同构

$$(\Gamma_{n+1}(K)-\nu_{n+2}H_{n+2}(K))\approx\lambda_{n+1}\Gamma_{n+1}(K).$$

通过K的同調示性数去計算$\pi_{n+1}(K)$,尙要闡明羣$\Gamma_{n+1}(K)$以及同态ν_{n+2}并且要描述$H_{n+1}(K)$的羣扩张. 在这时我們引进了$n>2$的假定.

設η是$\pi_{n+1}(S^n)$的生成元. 于是, 由于η是一个同緯映象元

---

1) 羣K是羣H对于羣G的一个扩張, 如果有K到H上的一个同态它的核同构于H的話.

素，从第六章定理 2.3 得出映射 $\alpha \to \alpha\circ\eta$, $\alpha \in \pi_n(K)$ 导出一个同态 $\bar{\eta}:\pi_n(K) \to \pi_{n+1}(K)$. 不过，由于任一个 $\alpha \in \pi_n(K)$ 有一个代表映象 $f:S^n \to K^n$, 从而 $\alpha \to \alpha\circ\eta$ 于事实上决定了一个同态

$$\theta:\pi_n(K) \to i_{n+1}\,\pi_{n+1}(K^n) = \Gamma_{n+1}(K).$$

定理 2.4. θ 是 $\pi_n(K)$ 到 $\Gamma_{n+1}(K)$ 上的一个同态，其核是 $2\pi_n(K)$.

首先注意到，由于 $2\eta = 0$, $2\alpha\circ\eta = \alpha\circ 2\eta = 0$, 因此 $2\pi_n(K)$ 的确在核内.

現在 $\pi_n(K^n) \approx H_n(K^n)$, 它是一个 n 維閉鏈羣，因此 $\pi_n(K^n)$ 是自由交換羣. 設 $\{a_i\}$ 是 $\pi_n(K^n)$ 的自由生成元的一个集合，設 $\{e_\lambda^{n+1}\}$ 是K的 $(n+1)$ 維胞腔并且設 $c_\lambda \in \pi_{n+1}(K^{n+1}, K^n)$ 是由一个对于 e_λ^{n+1} 的特征映象所代表. 于是 $\{c_\lambda\}$ 是 $\pi_{n+1}(K^{n+1}, K^n)$的自由生成元的一个集合，而且由于 $\pi_n(K) \approx \pi_n(K^n) - d_{n+1}\,\pi_{n+1}(K^{n+1}, K^n)$, $\pi_n(K)$ 是由 $\{a_i\}$ 生成且有关系式 $b_\lambda = d_{n+1}\,c_\lambda = 0$.

設 $K_0^n = e^0 \cup \{e_i^n\}$, 其中 $\{e_i^n\}$ 是 n 維胞腔[1] 在与 $\{a_i\}$ 一一对应下的一个集合. 于是 $e^0 \cup e_i^n$ 是一个 n 維球 S_i^n 且 $\pi_n(K_0^n)$ 是被元素 $\{a_i^0\}$ 的集合自由生成，其中 a_i^0 是由一个同胚映象 $\phi_i:S^n \to S_i^n$ 所代表. 設 $\psi:K_0^n \to K^n$ 使得 $\psi\phi_i$ 代表 a_i. 由于 $\pi_r(K_0^n) = \pi_r(K^n) = 0$, $r < n$, 并且由于 ψ 显然地导出由 $a_i^0 \leftrightarrow a_i$ 給定的同构 $\pi_n(K_0^n) \approx \pi_n(K^n)$, 据第七章定理 3.1 得出 ψ 是一个同伦等价. 因此，特别，ψ 导出 $\psi_{n+1}:\pi_{n+1}(K_0^n) \approx \pi_{n+1}(K^n)$. 現在假如 $n > 2$, $n+1 < 2n-1$, 則据第六章(4.3)得出

$$\pi_{n+1}(S_1^n \cup S_2^n) \approx \pi_{n+1}(S_1^n) + \pi_{n+1}(S_2^n),\ n > 2, \tag{2.5}$$

其中 $S_1^n \cup S_2^n$ 是具有一个公共点的两个 n 維球的并集. 依据应用于第六章的論証中的一个明显的推广，我們可以对于任意（有限）个数的 n 維球的并集推广(2.5)到一个类似的规則；因此

$$\pi_{n+1}(S_1^n \cup \cdots \cup S_k^n) \approx \pi_{n+1}(S_1^n) + \cdots + \pi_{n+1}(S_k^n),\ n > 2. \tag{2.6}$$

現在由于 K_0^n 的任何紧致子集都是含于 S_i^n 的一个有限个数

---

1) 可能有无穷多个，但互不相交.

的并集中，并且由于这一并集是 K_0^n 的一个收縮核，从 (2.6) 得出 $\pi_{n+1}(K_0^n)$ 中的元素是唯一地表作为元素 $a_i^0\circ\eta$ 的一个(有限)和. 換句話說，$\pi_{n+1}(K_0^n)$ 是一个自由模 mod2，由 $\{a_i^0\circ\eta\}$ 自由生成. 显然，$\psi_{n+1}(a_i^0\circ\eta)=a_i\circ\eta$，因此 $\pi_{n+1}(K^n)$ 是一个自由模 mod2 由 $\{a_i\circ\eta\}$ 自由生成. 由于

$$\Gamma_{n+1}(K)=i_{n+1}\pi_{n+1}(K^n),$$
$$\subset\pi_{n+1}(K^{n+1}),\approx\pi_{n+1}(K^n)-d\pi_{n+2}(K^{n+1},K^n),$$

当我們示明了关系式 $d\pi_{n+2}(K^{n+1},K^n)=0$ 就正是关系式 $b_\lambda\circ\eta=0$ 时，定理便得証.

設 P 是一个 CW-复合形，它是 $(n+1)$ 維元体 E_λ^{n+1} 的一个并集，这些元体有一个公共点(在每一个 E_λ^{n+1} 的边緣上)，这里的 E_λ^{n+1} 是和 K 的 $(n+1)$ 維胞腔 e_λ^{n+1} 一一对应. 設 Q 是边緣 n 維球 $\dot{E}_\lambda^{n+1}$ 的并集，并且設 $h:P,Q\to K^{n+1},K^n$ 使得 $h|E_\lambda^{n+1}$ 是对于 e_λ^{n+1} 的一个特征映象. 設 h 导出 $g_{n+2}:\pi_{n+2}(P,Q)\to\pi_{n+2}(K^{n+1},K^n)$. 据威脱海特的同緯映象定理[1)]

$$\pi_{n+2}(K^{n+1},K^n)=g_{n+2}\pi_{n+2}(P,Q).$$

設 $h|Q$ 导出 $h_{n+1}:\pi_{n+1}(Q)\to\pi_{n+1}(K^n)$ 并且考虑图解

$$\begin{array}{ccc}\pi_{n+2}(P,Q) & \xrightarrow{d} & \pi_{n+1}(Q)\\ \downarrow{\scriptstyle g_{n+2}} & & \downarrow{\scriptstyle h_{n+1}}\\ \pi_{n+2}(K^{n+1},K^n) & \xrightarrow{d} & \pi_{n+1}(K^n)\end{array}$$

其中同一个符号 d 代表两个边緣同态. 由于 P 是可以縮成一点的，我們有

$$d:\pi_{n+2}(P,Q)\approx\pi_{n+1}(Q),$$

并且由于"交換律"，$dg_{n+2}=h_{n+1}d$ 显然成立，我們有

$$d\pi_{n+2}(K^{n+1},K^n)=dg_{n+2}\pi_{n+2}(P,Q)$$
$$=h_{n+1}d\pi_{n+2}(P,Q)=h_{n+1}\pi_{n+1}(Q).$$

現在，据定义，$(h|\dot{E}_\lambda^{n+1})\phi_\lambda$ 代表 $b_\lambda\in\pi_n(K^n)$，这里 ϕ_λ 是一个

---

1) "A note on suspension" 中的定理 1, *Quart. J. Math.*, Oxford (2), 1 (1950), 9—22. 事实上，g_{n+2} 是同构的. 同时参看第六章的 2.11 和 2.12.

同胚映象 $S^n \to E_\lambda^{n+1}$. 同时 $\pi_n(Q)$ 由 $\{e_\lambda\}$ 自由地生成，其中 e_λ 由 ϕ_λ 代表，并且，如同較早对 K_0^n 所証明的，$\pi_{n+1}(Q)$ 是一个自由模 mod2 由 $\{e_\lambda \circ \eta\}$ 自由地生成. 显然 $h_{n+1}(e_\lambda \circ \eta) = b_\lambda \circ \eta$，因此关系式

$$d\pi_{n+2}(K^{n+1}, K^n) = 0$$

如所断言的，正是关系式 $b_\lambda \circ \eta = 0$，而定理得以証明.

由于 $\pi_n(K) \approx H_n(K)$，我們有 $\Gamma_{n+1}(K) \approx (H_n(K))_2$，即 $H_n(K)$ 用 mod2 約簡了，并且 ν_{n+2} 这时可以恆同地視作同态[1]. $\nu_{n+2}: H_{n+2}(K) \to (H_n(K))_2$. 这样如果我們已給出 $H_n(K)$, $H_{n+1}(K)$, $H_{n+2}(K)$ 以及 ν_{n+2}，我們知道 $\pi_{n+1}(K)$ 就是一个已給羣对于一已給羣的扩张. 剩下的就是去計算这扩张. 由于我們有兴趣于 $\pi_{n+1}(K)$，故事实上，假如 k 的維数 $> n+2$，以 K^{n+2} 代 K 就足够了.

我們現在定义[2] $H_{n+2}(2)$ 为 $(\delta_{n+2}^{-1}(2Z_{n+1}(K)))_2$，其中 $Z_{n+1}(K)$ 是 K 的 $(n+1)$ 維閉鏈羣，并且将定义一个同态 $\nu(2): H_{n+2}(2) \to \Gamma_{n+1}(K)$. 由于 $\Gamma_{n+1}(K)$ 是一个模 mod2，且 $H_{n+2}(2)$ 正是由 mod2 約簡了的 $\delta_{n+2}^{-1}(2Z_{n+1}(K))$，显然足够去定义一个同态

$$\bar{\nu}: \delta_{n+2}^{-1}(2Z_{n+1}(K)) \to \Gamma_{n+1}(K).$$

設 $c \in \delta_{n+2}^{-1}(2Z_{n+1}(K))$. 这时 $\delta_{n+2}(c) = 2z$, $z \in Z_{n+1}(K)$. 我們現在指出 $Z_{n+1}(K) = j_{n+1}\pi_{n+1}(K^{n+1})$. 因为，由于 $\Gamma_n(K) = 0$，从而有 j_n 同构地映射 $\pi_n(K^n)$ 到 $\pi_n(K^n; K^{n-1})$ 上，因此

$$\begin{aligned} Z_{n+1}(K) &= \delta_{n+1}^{-1}(0) = (j_n d_{n+1})^{-1}(0) \\ &= d_{n+1}^{-1}(j_n^{-1}(0)) = d_{n+1}^{-1}(0) = j_{n+1}\pi_{n+1}(K^{n+1}). \end{aligned}$$

这样 $z = j_{n+1}(y)$, $y \in \pi_{n+1}(K^{n+1})$，且 $\delta_{n+2}(c) = j_{n+1}(2y)$. 这样，$j_{n+1}(d_{n+2}(c) - 2y) = 0$，因此 $d_{n+2}c - 2y \in \Gamma_{n+1}(K)$. 再者，如果 $z' = j_{n+1}y'$ 和 $2z' = 2z = \delta_{n+2}c$，則由 $C_{n+1}(K)$ 是自由可换羣的事实有 $z' = z$，因此 $j_{n+1}(y' - y) = 0$，从而 $y' - y \in \Gamma_{n+1}(K)$ 而

---

1) 回忆起这一同态 ν 是被 J. H. C. 威脫海特称作"第二边緣"的.

2) 羣 $H_{n+2}(2)$ 正是 K 的 $(n+2)$ 次同調羣，具有用 mod 2 約簡了的整数系数. 如果 $\dim K > n+2$ 我們便有

$$H_{n+2}(2) = (\delta_{n+2}^{-1}(2Z_{n+1}(K))/\delta_{n+3}C_{n+3}(K))_2.$$

見 "A certain exact sequence", p. 55.

$2y' = 2y$，因为 $\Gamma_{n+1}(K)$ 中的每一个非零元素具有阶 2． 这样映象 $c \to d_{n+2}c - 2y$ 是单值的而它显然是一个同态． 如果我們称这一同态作 $\bar{v}$，当我們作自然迭合

$$Z_{n+2}(K) \approx H_{n+2}(K),$$

K 是 $(n+2)$ 維的，于是显然地 $\bar{v}|Z_{n+2}(K)$ 就正是 v_{n+2}，由于 $v(2)$ 决定了并且是由 $\bar{v}$ 所决定的，从而 $v(2)$ 的內容蘊含了 v_{n+2} 的內容．

如果 K 是有限的我們将示明 $v(2)$ 确定 $\pi_{n+1}(K)$ 为一个羣扩张．于是 $H_{n+1}(K) = B + T_0 + T_e$，其中 B 是自由可换羣，T_0 是奇数阶的循环羣的直接和而 T_e 是偶数阶的循环羣的直接和． 設 $(b_1, \cdots, b_\rho)$ 是 B 的一个自由基，設 T_0 是由奇数阶数 $\tau_1, \cdots, \tau_\sigma$ 的 $(v_1, \cdots, v_\sigma)$ 所生成，并且設 $a_1, \cdots, a_\rho, a_1', \cdots, a_\sigma'$ 是 $\pi_{n+1}(K)$ 的元素使得 $\mu_{n+1}(a_1) = b_1, \cdots, \mu_{n+1}(a_\rho) = b_\rho$，$\mu_{n+1}(a_1') = v_1, \cdots, \mu_{n+1}(a_\sigma') = v_\sigma$． 把 T_0 認作是由 $(2v_1, \cdots, 2v_\sigma)$ 所生成并且定义同态 $\mu^*: B + T_0 \to \pi_{n+1}(K)$ 为

$$\mu^*(b_i) = a_i, \quad i = 1, \cdots, \rho;$$

$$\mu^*(2v_j) = 2a_j', \quad j = 1, \cdots, \sigma.$$

于是 μ^* 是单值的[1]，因为 $\mu^*(2\tau_j v_j) = 2\tau_j a_j'$；但

$$\tau_j a_j' \in \mu_{n+1}^{-1}(0),$$

而 $\mu_{n+1}^{-1}(0)$ 是一个模 mod2，因此 $\mu^*(2\tau_j v_j) = 0$． 同时 $\mu_{n+1}\mu^*$ 是恆等映象．这样 $\pi_{n+1}(K) = \mu^*(B + T_0) + \pi^e$，其中 μ^* 是一个同构而 π^e 是 T_e 对于 $\Gamma_{n+1}(K) - v_{n+2}H_{n+2}(K)$ 的一个扩张． 余下的是去决定 π^e．設 T_e 由(偶数)阶数 $\tau_1, \cdots, \tau_m$ 的 $(t_1, \cdots, t_m)$ 生成．設 $(c_1, \cdots, c_m, c_{m+1}, \cdots)$ 是对于 $C_{n+2}(K)$ 的一个典型基，并且設 $\delta c_i = \tau_i z_i$，$i = 1, \cdots, m$，其中 z_i 是类 t_i 中的一个 $(n+1)$ 維閉鏈． 現在 $z_i = j_{n+1}(y_i)$，$y_i \in \pi_{n+1}(K^{n+1})$，且 $k_{n+1}(y_i) \in \pi_{n+1}(K)$ 是

---

1) 我們把 v_j 看作为 $\frac{1+\tau_j}{2}(2v_j)$；这样我們就有可能以 $\mu^*(v_j) = (1+\tau_j)a_j'$ 定义 μ^* 于 T_0 上． 严格地說这就是与本文中所給的 μ^* 有所不同，但同时适用于各处．

t_i 在 π^e 中的一个代表，这里的 k_{n+1}，如前，是內射 $k_{n+1}:\pi_{n+1}(K^{n+1}) \to \pi_{n+1}(K)$。我們将計算 $\tau_i(k_{n+1}(y_i)) \in \Gamma_{n+1}(K) - \nu_{n+2} H_{n+2}(K)$，現在

$$\bar{v}(c_i) = d_{n+2}(c_i) - \tau_i y_i.$$

因此 $\bar{k}_{n+1}(\tau_i y_i) = -k_{n+1}\bar{v}(c_i)$。現在

$$\bar{v}(c_i) \in \Gamma_{n+1}(K) \text{ 且 } k_{n+1}|\Gamma_{n+1}(K)$$

正是(2.2)中的同态 λ_{n+1}；且我們已經把 $\lambda_{n+1}\Gamma_{n+1}(K)$ 恆同于它的同构象 $\Gamma_{n+1}(K) - \nu_{n+2} H_{n+2}(K)$。这样[1]

$$\tau_i(k_{n+1}(y_i)) = k_{n+1}(\tau_i y_i) = \bar{k}\bar{v}(c_i),$$

其中 $\bar{k}$ 是自然同态 $\Gamma_{n+1}(K) \to \Gamma_{n+1}(K) - \nu_{n+2} H_{n+2}(K)$。元素 $\tau_i(k_{n+1}y_i)$，等价地，决定扩张 π^e。由于 $\bar{k}$ 是由 ν_{n+2} 决定，而 ν_{n+2} 以及 $\bar{v}$ 是由 $\nu(2)$ 决定，我們便示明了 $\nu(2)$ 是怎样地决定 $\pi_{n+1}(K)$ 为一个羣扩张.

3. 同調系和縮減复合形. 借助于定理 2.4 中的同态 θ 和自然同构 $\pi_n(K) \approx H_n(K)$，我們把 $\Gamma_{n+1}(K)$ 与 $H_n(K)|2H_n(K)$ 恆同起来，上面的 K 是一个維数 $\leqslant n+2$ 的一个有限胞腔复合形，它的前 $(n-1)$ 个同伦羣是零. 然后我們看到序列(2.2)，通过同构，由羣 $H_n(K)$，$H_{n+1}(K)$，$H_{n+2}(K)$ 以及 $H_{n+2}(2)$ 和同态

$$\nu(2): H_{n+2}(2) \to H_n(K)|2H_n(K)$$

所决定，自然，假定了 $n > 2$.

繼威脱海特后，作者定义了一个(抽象的)**同調系**[2]如下. 它是由一些抽象的无限母羣 H_n，H_{n+1}，H_{n+2}，$H_{n+2}(2)$ 以及某些同态組成. 这些羣是交換羣且 H_{n+2} 是自由交換羣，一个同态 $\Delta: H_{n+2}(2) \to H_{n+1}$ 給定为[3]到 ${}_2H_{n+1}$ 上的，并且有一个右逆同态 $\Delta^*: {}_2H_{n+1} \to H_{n+2}(2)$。一个同态 $\mu: H_{n+2} \to H_{n+2}(2)$ 是把 H_{n+2} 的每一个

---

1) $-k_{n+1}\bar{v}(c_i)$ 中的負号自然可以被压縮掉.

2) 事实上，威脱海特定义过一个上同調系. 这在形式上恆同于一个同調系，代替同調羣，而是相对于一个复合形的上同調羣.

3) 給定一个交換羣 G 和一个整数 m，mG 指元素 mg，$g \in G$ 的集合，${}_mG$ 指使得 $mg = 0$ 的 $g \in G$ 的集合，而 G_m 就是商羣 G/mG.

元映射到它的剩余类 mod2，并且嵌 $(H_{n+2})_2$ 入 $H_{n+2}(2)$. 此外，$\Delta^{-1}(0)=\mu H_{n+2}$，因此 $H_{n+2}(2)=\mu H_{n+2}+\Delta^*{}_2H_{n+1}$. 最后，给定有一个同态 $\gamma:H_{n+2}(2)\to(H_n)_2$.

如此的一个同调系是由复合性K所提供. 羣 H_n, H_{n+1}, H_{n+2}, $H_{n+2}(2)$ 解释作 $H_n(K)$, $H_{n+1}(K)$, $H_{n+2}(K)$ 以及 $H_{n+2}(2)$（在K内定义如 $\delta_{n+2}^{-1}(2Z_{n+1}(K))$，由 mod 約簡）. 于是 $(H_{n+2}(K))_2=(Z_{n+2}(K))_2$ 显然地嵌入 $H_{n+2}(2)$，因此μ有定义. 同态γ正是$\nu(2)$，且我們定义 $\Delta:H_{n+2}(2)\to H_{n+1}(K)$ 如下. 設x'是类 $x\,\mathrm{mod}2\in H_{n+2}(2)$ 中的一个鏈. 于是$\dfrac{1}{2}\delta_{n+2}x'$ 是一个 $(n+1)$ 維閉鏈，它的同调类是Δx. 設 $t_1,\cdots,t_m$ 生成 T_e，它是一个有偶的挠系数的 $H_{n+1}(K)$ 的子羣，因此 t_i 是有偶的阶数 τ_i, $i=1,\cdots,m$. 于是 ${}_2H_{n+1}(K)$ 是由$\dfrac{\tau_1}{2}t_1,\cdots,\dfrac{\tau_m}{2}t_m$生成. 設$t_i'$是在类$t_i$中的一个閉鏈，設$u_i'$是一个$(n+2)$維鏈使得 $\delta_{n+2}u_i'=\tau_it_i'$ 并且設u_i是在 $H_{n+2}(2)$ 中、u_i' 的类. 于是一个右逆同态 $\Delta^*:{}_2H_{n+1}(K)\to H_{n+2}(2)$ 由 $\Delta^*\dfrac{\tau_i}{2}t_i=u_i(i=1,\cdots,m)$ 所定义. 应該注意到Δ^*依賴于u_i'的选择，因而它只是模式地由 ${}_2H_{n+1}(K)$ 到 $\mu H_{n+2}(K)$ 內的一个任意的同态所决定. 因此在K中去驗証，$H_{n+2}(2)=\mu H_{n+2}(K)+$ $+\Delta^*{}_2H_{n+1}(K)$ 是一件容易的事情.

我們現在規定一个任意的同調系，且而后作一个"縮減的"复合形它的同調系同构于一个已給的同調系. 对于这一抽象系的羣和同态，我們将采用相同于复合形的同調系的对应元素的符号，对于同态 $H_{n+2}(2)\to(H_n)_2$ 我們則不愿用$\nu(2)$而用γ. 我們的記号这时便与作者論文[1]中的一致.

設 $H_n=(a_1,\cdots,a_m)$，这里 $\sigma_1a_1=\cdots=\sigma_ta_t=0$ 且 σ_i 是奇数当而且仅当 $1\leqslant i\leqslant h\leqslant t\leqslant m$. 事实上，我們将把$\sigma_1,\cdots,\sigma_t$取作挠系数. 設 $H_{n+1}=(b_1,\cdots,b_l)$，这里

---

1) 見 120 頁脚注.

$$\tau_1 b_1 = \tau_2 b_2 = \cdots = \tau_u b_u = 0,$$

且 τ_i 是奇数当而且仅当 $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant u \leqslant l$. 此外，我們将把 $\tau_1, \cdots, \tau_u$ 取作撓系数. 設 $H_{n+2} = (c_1, \cdots, c_p)$，是自由交换羣. 于是 $(H_n)_2 = (\bar{a}_{k+1}, \cdots, \bar{a}_m)$，其中 $\bar{a}_i$ 是 a_i 的剩余类 mod2；类似地，$(H_{n+2})_2 = (\bar{c}_1, \cdots, \bar{c}_p)$. 羣 ${}_2H_{n+1}$ 是由 $\frac{\tau_{k+1}}{2} b_{k+1}, \cdots, \frac{\tau_u}{2} b_u$ 生成，因此

$$H_{n+2}(2) = (\bar{c}_1, \cdots, \bar{c}_p, \bar{c}_{p+1}, \cdots, \bar{c}_{p+u-k}),$$

其中

$$\bar{c}_{p+i} = \Delta^* \frac{\tau_{k+i}}{2} b_{k+i}, \quad i = 1, \cdots, u-k.$$

設 $\gamma: H_{n+2}(2) \to (H_n)_2$ 給定为

$$\gamma \bar{c}_i = \sum_{j=h+1}^{m} \gamma_{ij} \bar{a}_j, \quad i = 1, \cdots, p+u-k, \qquad (3.1)$$

这里的系数 γ_{ij} 是 0 或 1.

我們現在作一个胞腔复合形 K 如下:

$K^0 = \cdots = K^{n-1} = e^0$，一个单独的点；

$K^n = e^0 \cup e_1^n \cup \cdots \cup e_m^n$，因此 e^0 封閉 e_i^n 成一个 n 維球 S_i^n，$i = 1, \cdots, m$；

$K^{n+1} = K^n \cup e_1^{n+1} \cup \cdots \cup e_{t+l}^{n+1}$，这里的 e_i^{n+1} 是由一个度数为 σ_i 的一个映象 $g_i: \dot{E}_i^{n+1} \to S_i^n$，$i = 1, \cdots, t$ 附加到 K^n 上，并且 e^0 封閉 e_{t+j}^{n+1} 成一个 $(n+1)$ 維球 S_j^{n+1}，$j = 1, \cdots, l$；

$K^{n+2} = K^{n+1} \cup e_1^{n+2} \cup \cdots \cup e_{p+u}^{n+2}$，这里的 e_i^{n+2} 是由一个映象 $f_i: \dot{E}_i^{n+2} \to K^n$ 附加到 K^{n+1} 上，这一映象本質上是在一些球 S_j^n 上对于它 $\gamma_{ij} = 1$，$i = 1, \cdots, p$；e_{p+i}^{n+2} 是由一个映象 $f_{p+i}: \dot{E}_{p+i}^{n+2} \to K^{n+1}$ 附加到 K^{n+1}，这一映象在 S_{k+i}^{n+1} 上具有度数 τ_{k+i} 并且本質上是在一些球 S_j^n 上对于它 $\gamma_{p+i,j} = 1$，$i = 1, \cdots, u-k$；并且 $e_{p+u-k+i}^{n+2}$ 是由一个映象 $f_{p+u-k+i}: \dot{E}_{p+u-k+i}^{n+2} \to K^{n+1}$ 附加到 K^{n+1}，这一映象在 S_i^{n+1}，$i = 1, \cdots, k$ 上具有度数 τ_i.

要弄清附加 $(n+2)$ 維胞腔方法的描述，必需計算 $\pi_{n+1}(K^{n+1})$.

我們可以由 K^{n+1} 的胞腔分解直接从事这一工作。轉換一下，我們可以由正合序列

$$H_{n+2}(K^{n+1}) \xrightarrow{\nu} \Gamma_{n+1}(K^{n+1}) \xrightarrow{\lambda} \pi_{n+1}(K^{n+1}) \xrightarrow{\mu} H_{n+1}(K^{n+1})$$

来論述[1)]，这个 μ 是到 $H_{n+1}(K^{n+1})$ 上的，因为

$$\pi_r(K^{n+1}) = \pi_r(K) = 0, \quad r < n.$$

同时 $H_{n+2}(K^{n+1}) = 0$，因此 μ 的核是 $\Gamma_{n+1}(K^{n+1})$ 的同构象，并且据定义，$\Gamma_{n+1}(K^{n+1})$ 正是 $\Gamma_{n+1}(K)$，它同构于 $(H_n)_2$。这样

$$\pi_{n+1}(K^{n+1}) - \lambda\Gamma_{n+1}(K^{n+1}) \approx H_{n+1}(K^{n+1}),$$

并且

$$\lambda\Gamma_{n+1}(K^{n+1}) \approx (H_n)_2;$$

但由于 $H_{n+1}(K^{n+1})$ 是自由交换羣，从而

$$\pi_{n+1}(K^{n+1}) \approx H_{n+1}(K^{n+1}) + (H_n)_2. \tag{3.2}$$

再者，显然地 $H_{n+1}(K^{n+1})$ 嵌入于作为直接和

$$\pi_{n+1}(S_1^{n+1}) + \cdots + \pi_{n+1}(S_l^{n+1})$$

的 $\pi_{n+1}(K^{n+1})$ 中，并且 $(H_n)_2$ 嵌入于作为直接和

$$\pi_{n+1}(S_{h+1}^n \cup e_{h+1}^{n+1}) + \cdots$$
$$+ \pi_{n+1}(S_t^n \cup e_t^{n+1}) + \pi_{n+1}(S_{t+1}^n) + \cdots + \pi_{n+1}(S_m^n)$$

的 $\pi_{n+1}(K^{n+1})$ 中。羣 $\pi_{n+1}(S_i^n \cup e_i^{n+1})$，$i = h+1, \cdots, t$ 正是 $\pi_{n+1}(S_i^n)$ 在内射下的同构象。

驗証胞腔复合形 K 实現巳給的抽象同調系是一件直接的事情。我們正是要通过这一驗証得出 $\nu(2)$ 重合于同态 γ。

現在 $C_{n+2}(K)$ 是由 $(c_1, \cdots, c_{p+u})$ 生成，其中 c_i 对应于 $(n+2)$ 維胞腔 e_i^{n+2} 而子羣 $\delta_{n+2}^{-1}(2Z_{n+1}(K))$ 是由 $(c_1, \cdots, c_{p+u-k})$ 生成；因此 $H_{n+2}(2) = (\bar{c}_1, \cdots, \bar{c}_{p+u-k})$。我們回忆到 $\nu(2)(\bar{c}_i)$ 是元素 $d_{n+2}(c_i) - 2y_i$，这里 $d_{n+2}: \pi_{n+2}(K^{n+2}, K^{n+1}) \to \pi_{n+1}(K^{n+1})$ 是同伦边緣而 y_i 是 $\pi_{n+1}(K^{n+1})$ 中的一个元素，使得

$$2j_{n+1}(y_i), \in \pi_{n+1}(K^{n+1}, K^n), = \delta_{n+2}(c_i).$$

1) 这一論述更充份，因为它应用于任意的 CW-复合形，其起始的 $(n-1)$ 个同伦羣为零。

应用 (3.2)，恆同 $H_{n+1}(K^{n+1})$ 于 $\pi_{n+1}(K^{n+1})$ 的一个子羣，我們有 $v(2)(\bar{c}_i) = d_{n+2}(c_i) - \delta_{n+2}(c_i)$. 現在

$$d_{n+2}(c_i) = \sum_{j=h+1}^{m} \gamma_{ij}\bar{a}_j, \quad i = 1, \cdots, p; \quad \delta_{n+2}(c_i) = 0,$$

$$i = 1, \cdots, p,$$

$$d_{n+2}(c_{p+i}) = \tau_{k+i} b_{k+i}^* + \sum_{i=h+1}^{m} \gamma_{p+i,j}\bar{a}_j, \quad i = 1 \cdots, u - k;$$

$$\delta_{n+2}(c_{p+i}) = \tau_{k+i} b_{k+i}^*, \quad i = 1, \cdots, u - k,$$

当我們凭借(3.2)恆同 $(H_n)_2$ 于 $\pi_{n+1}(K^{n+1})$ 的一个子羣时，而这里 $H_{n+1}(K^{n+1}) = (b_1^*, \cdots, b_l^*)$，$b_i^*$ 对应于 S_i^{n+1}，$i = 1, \cdots, l$. 于是

$$v(2)(\bar{c}_i) = \sum_{j=h+1}^{m} \gamma_{ij}\bar{a}_j, \quad i = 1, \cdots, p + u - k, = \gamma(\bar{c}_i),$$

正如所要証明的.

通过由附加这些 $(p + u)(n + 2)$ 維胞腔 $e_1^{n+2}, \cdots, e_{p+u}^{n+2}$ 引进于 $\pi_{n+1}(K^{n+1})$ 中关系的研究，現在我們可以計算 $\pi_{n+1}(K)$. 用前面作成的恆同关系我們有

$$\pi_{n+1}(K^{n+1}) = (b_1^*, \cdots, b_l^*) + (\bar{a}_{h+1}, \cdots, \bar{a}_m), \tag{3.3}$$

幷且不难看出这些引进的关系是

$$\left.\begin{aligned} &\gamma\bar{c}_i = \Sigma\, \gamma_{ij}\bar{a}_j = 0, \quad i = 1, \cdots, p, \\ &\tau_{k+i}b_{k+i}^* + \gamma\bar{c}_{p+i} = \tau_{k+i}\, b_{k+i}^* + \Sigma\gamma_{p+i,} \\ &\qquad {}_j\bar{a}_j = 0, i = 1, \cdots, u - k, \\ &\tau_i b_i^* = 0, \quad i = 1, \cdots, k. \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

这立刻引向 $\pi_{n+1}(K)$ 的値的一个公式，在形式上几乎是恆同于 § 2 中所給的. 下面的定理[1] 以計算 $\pi_{n+1}(K)$ 方面而論可以認为是 § 2 以及本节內容的总和，关于它的推导的詳細过程我們就归之于作者的前面引用到的論文.

定理 3.5. 如果 K 是一个維数 $\leqslant n + 2$, $n > 2$ 的有限胞腔

---

1) 这就是本章第一个脚注中引用到的論文.

复合形，使得$\pi_r(K)=0$，$r=1,\cdots,n-1$，于是$\pi_{n+1}(K)$是H_{n+1}对于$(H_n)_2-\gamma\mu H_{n+2}$的一个扩張．如果$H_{n+1}$給定为$B+T_0+T_e$，这里$B$是自由交換羣，$T_0$是一个有奇撓系數的羣而$T_e$是一个有偶撓系數的羣，于是$\pi_{n+1}(K)\approx B+T_0+E$，这里$E$是$T_e$对于$(H_n)_2-\gamma\mu H_{n+2}$的一个扩張．設$T_e$是由階數为$\tau_{k+1},\cdots,\tau_u$的$b_{k+1},\cdots,b_u$所生成．于是$b_{k+1},\cdots,b_u$的代表可以在$E$中选擇，且可称作为$b_{k+1}^*,\cdots,b_u^*$使得$\tau_{k+i}b_{k+i}^*=j\gamma\Delta^{-1}\frac{1}{2}\tau_{k+i}b_{k+i}$，这里$j$是內射

$$(H_n)_2\to(H_n)_2-\gamma\mu H_{n+2}.$$

J. H. C. 威脫海特曾示明，同調系決定了这样一个胞腔复合形的同伦型[1]，它有着如定理3.5中的K的性質．这样我們便导向于研究K的較高次同伦羣的計算問題．这样的計算当然得依賴于球上的同伦羣．用$\pi_{n+2}(S^n)$，$n\geqslant 2$是阶2的循环羣这一事实，我們可以計算$\pi_{n+2}(K)$，但一般地說，这是比較复杂的．

設K是$(n+2)$維的．这时，从正合序列

$$H_{n+3}(K)\xrightarrow{\nu_{n+3}}\Gamma_{n+2}(K)\xrightarrow{\lambda_{n+2}}\pi_{n+2}(K)\xrightarrow{\mu_{n+2}}H_{n+2}(K)\xrightarrow{\nu_{n+2}}\Gamma_{n+1}(K),$$

我們有$H_{n+3}(K)=0$，因此λ_{n+2}是同构而μ_{n+2}是$\pi_{n+2}(K)$到$\nu_{n+2}^{-1}(0)$上的一个同态，它的核同构于$\Gamma_{n+2}(K)$．再者，$\nu_{n+2}^{-1}(0)$作为自由交換羣$H_{n+2}(K)$的一个子羣，本身亦是自由交換的，因此

$$\pi_{n+2}(K)\approx\Gamma_{n+2}(K)+\nu_{n+2}^{-1}(0),\tag{3.6}$$

而$\pi_{n+2}(K)$的計算就归結为对$\Gamma_{n+2}(K)$的計算．現在假定$n>2$而$\pi_r(K)=0$，$r=1,\cdots,n-1$．于是$\Gamma_{n+1}(K)$是一个自由模mod2 因而$\nu_{n+2}(2H_{n+2}(K))=0$．由于$H_{n+2}(K)$是自由交換的，从而$2H_{n+2}(K)\approx H_{n+2}(K)$，并且由于$\nu_{n+2}^{-1}(0)$是在$H_{n+2}(K)$和

---

1) 他曾示明，一个維数$\leqslant n+2$，$n>2$的(也可以是无穷的)其前$(n-1)$个同伦羣为零的CW-复合形的同伦型，是由它的“正合序列”起始部分

$$H_{n+2}(K)\xrightarrow{\nu_{n+2}}\Gamma_{n+1}(K)\to\cdots$$

所决定

$_2H_{n+2}(K)$ "中間的"一个羣，我們同时有 $\nu_{n+2}^{-1}(0) \approx H_{n+2}(K)$。这样，在这一情形

$$\pi_{n+2}(K) \approx \Gamma_{n+2}(K) + H_{n+2}(K). \tag{3.7}$$

我們現在于一个特殊情形計算 $\Gamma_{n+2}(K)$.

定理 3.8. 如果K是如同在定理 3.5 中的，假如 $n > 3$ 且 $\pi_{n+1}(K) = 0$，則 $\Gamma_{n+2}(K) \approx {}_2H_n$.

由于 $\pi_{n+1}(K) = 0$，由定理 3.5 有 $H_{n+1}(K) = 0$ 以及 $\gamma\mu H_{n+2} = (H_n)_2$. 这样我們可以对于 μH_{n+2} 选择一个基 $\bar{c}_1, \cdots, \bar{c}_q$，使得

$$\gamma\bar{c}_i = \bar{a}_{h+i}, \quad i = 1, \cdots, m-h$$

$$\gamma\bar{c}_j = 0, \quad j = m-h+1, \cdots, q.$$

由于 H_{n+2} 是自由交換的，基 $\bar{c}_1, \cdots, \bar{c}_q$ 能够"昇騰"到一个对于 H_{n+2} 的基 $c_1, \cdots, c_q$. 一个有着和K相同的同伦型的縮減复合形，我們可以径取作K本身，这时将有下面的类别：

$K^0 = \cdots = K^{n-1} = e^0$;

$K^n = e^0 \cup e_1^n \cup \cdots \cup e_m^n$，且 $e^0 \cup e_i^n = S_i^n$，$i = 1, \cdots, m$;

$K^{n+1} = K^n \cup e_1^{n+1} \cup \cdots \cup e_t^{n+1}$，这里 e_i^{n+1} 是由一个度数为 σ_i 的映象 $g_i: \dot{E}_i^{n+1} \to S_i^n$，$i = 1, \cdots, t$ 附加到 K^n，σ_i 是奇数当而且只当 $1 \leqslant i \leqslant h \leqslant t$;

$K^{n+2} = K^{n+1} \cup e_1^{n+2} \cup \cdots \cup e_q^{n+2}$，这里 e_i^{n+2} 是由一个本性映象 $f_i: \dot{E}_i^{n+2} \to S_{h+i}^n$，$i = 1, \cdots, m-h$ 附加到 K^n，并且 $e^0 \cup e_j^{n+2} = S_j^{n+2}$，$j = m-h+1, \cdots, q$.

我們現在来計算 $\pi_{n+2}(K^{n+1})$. 現在設 $n > 3$，$n+2 < 2n-1$，据第六章(4.3)[1]，因此

$$\pi_{n+2}(S_1^n \cup S_2^n) \approx \pi_{n+2}(S_1^n) + \pi_{n+2}(S_2^n), \quad n > 3 \tag{3.9}$$

而这一結果显然可以推广为

$$\pi_{n+2}(K^n) \approx \pi_{n+2}(S_1^n) + \cdots + \pi_{n+2}(S_m^n), \tag{3.10}$$

每一个直接加項 $\pi_{n+2}(S_i^n)$ $(i = 1, \cdots, m)$ 是由內射同构地嵌入

---

1) 正是在这点上 $n > 3$ 的限制才是必需的. 对 $n = 3$ 的情形在作者的論文：*Quart. J. Math.* (Oxford), (2), 2 (1951), 228—240, 定理 5.10 中曾处理过.

$_{n+2}(K^n)$. 我們将把 $\pi_{n+2}(K^n)$ 表示作 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$，这里 α_i 对应于 S_i^n，$i=1,\cdots,m$.

設 $g_1:\dot{E}_1^{n+1}\to S_1^n$ 导出[1] $h_r:\pi_r(\dot{E}_1^{n+1})\to\pi_r(K^n)$. 由于 σ_1 是奇数，且由于

$$\pi_{n+2}(S^n)=F\pi_{n+1}(S^{n-1}),\quad \pi_{n+1}(S^n)=F\pi_n(S^{n-1}),$$

从而立即有 $h_r:\pi_r(\dot{E}_1^{n+1})\approx\pi_r(S_1^n)$；$r=n+1,n+2$. 如果 g_1 扩张到一个特征映象

$$g_1':E_1^{n+1},\dot{E}_1^{n+1}\to K^n\cup e_1^{n+1},K^n$$

且如果 g_1' 导出

$$\bar{g}_r:\pi_r(E_1^{n+1},\dot{E}_1^{n+1})\to\pi_r(K^n\cup e_1^{n+1},K^n),$$

然后从第六章定理 2.13 有

$$\bar{g}_r:\pi_r(E_1^{n+1},\dot{E}_1^{n+1})\approx\pi_r(K^n\cup e_1^{n+1},K^n),\quad r=n+2,n+3.$$

考虑图解

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_{n+3}(\dot{E}_1^{n+1}) & \xrightarrow{d'_{n+3}} & \pi_{n+2}(\dot{E}_1^{n+1}) & & \\
\downarrow \bar{g}_{n+3} & & \downarrow h_{n+2} & & \\
\pi_{n+3}(K^n\cup e_1^{n+1},K^n) & \xrightarrow{d_{n+3}} & \pi_{n+2}(K^n) & \xrightarrow{i_{n+2}} & \pi_{n+2}(K^n\cup e_1^{n+1})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_{n+2}(E_1^{n+1},\dot{E}_1^{n+1}) & \xrightarrow{d'_{n+2}} & \pi_{n+2}(\dot{E}_1^{n+1}) \\
 & & \downarrow \bar{g}_{n+2} & & \downarrow h_{n+1} \\
\pi_{n+2}(K^n\cup e_1^{n+1}) & \xrightarrow{j_{n+2}} & \pi_{n+2}(K^n\cup e_1^{n+1},K^n) & \xrightarrow{d_{n+2}} & \pi_{n+1}(K^n)
\end{array}$$

現在我們把各个同态的意义当作是自明的，以及 $d_{n+3}\,\bar{g}_{n+3}=$ $=h_{n+2}\,d'_{n+3}$，$d_{n+2}\,\bar{g}_{n+2}=h_{n+1}\,d'_{n+2}$ 这些事实.

由于 $\bar{g}_{n+2}$ 是一个同构以及 $d_{n+2}\,\bar{g}_{n+2}=h_{n+1}\,d'_{n+2}$，从而 $\bar{g}_{n+2}\,d'^{-1}_{n+2}$ 同构地映射 $h_{n+1}^{-1}(0)$ 到 $d_{n+2}^{-1}(0)$ 上；但是

$d_{n+2}^{-1}(0)=j_{n+2}\pi_{n+2}(K^n\cup e_1^{n+1})\approx\pi_{n+2}(K^n\cup e_1^{n+1})-i_{n+2}\pi_{n+2}(K^n)$，同时

1) 我們認为 $\pi_r(S_1^n)$ 是由内射嵌入到 $\pi_r(K^n)$；如果 K 没有奇挠系数，自然这一部分的論証就落空.

$$i_{n+2}^{-1}(0) = d_{n+3}\pi_{n+3}(K^n \cup e_1^{n+1}, K^n) = d_{n+3}\bar{g}_{n+3}\pi_{n+3}(E_1^{n+1}, \dot{E}_1^{n+1})$$
$$= h_{n+2}\, d'_{n+3}\, \pi_{n+3}(E_1^{n+1}, \dot{E}_1^{n+1}) = h_{n+2}\, \pi_{n+2}(\dot{E}_1^{n+1}).$$

我們这时用 σ_1 是奇数的事实，从而 $h_{n+1}^{-1}(0)$，而

$$h_{n+2}\, \pi_{n+2}(\dot{E}_1^{n+1}) = \pi_{n+2}(S_1^n).$$

这样 $\pi_{n+2}(K^n \cup e_1^{n+1}) - i_{n+2}\pi_{n+2}(K^n) = 0$，因此，如果我們把$\pi_{n+2}(K^n)$ 表示作 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$，則 $\pi_{n+2}(K^n \cup e_1^{n+1})$ 由不計生成之 α_1 出現而获得.

显然我們可以按此一直进行到我們已經附加前 $h(n+1)$ 維胞腔于 K^n，形成 K_0^{n+1}，且得到

$$\pi_{n+2}(K_0^{n+1}) = (\alpha_{h+1}, \cdots, \alpha_m). \tag{3.11}$$

研究 e_{h+1}^{n+1} 的附加于 K_0^{n+1}. 十分类似于上面一个論証[1]示明了 $h_{n+1}^{-1}(0)$ 同构于

$$\pi_{n+2}(K_0^{n+1} \cup e_{h+1}^{n+1}) - i_{n+2}\, \pi_{n+2}(K_0^{n+1})$$

以及

$$i_{n+2}^{-1}(0) = h_{n+2}\, \pi_{n+2}(\dot{E}_{h+1}^{n+1}),$$

这里

$$h_r: \pi_r(\dot{E}_{h+1}^{n+1}) \to \pi_r(K_0^{n+1})$$

是由 g_{h+1} 导出[2]. 由于 σ_{h+1} 是偶数，所以

$$h_{n+2}\, \pi_{n+2}(\dot{E}_{h+1}^{n+1}) = h_{n+1}\, \pi_{n+1}(\dot{E}_{h+1}^{n+1}) = 0,$$

因而 $\pi_{n+2}(K_0^{n+1} \cup e_{h+1}^{n+1})$ 是阶 2 的一个循环羣对于 $\pi_{n+2}(K_0^{n+1})$的一个扩张. 对于其余的 $(t-h)(n+1)$ 維胞腔的每一个依次进行，我們得知 $\pi_{n+2}(K^{n+1})$ 是一个在 $(t-h)$ 个生成元上的一个自由模 mod2 对于 $\pi_{n+2}(K_0^{n+1})$ 的一个扩张. 如果 $B = (\beta_{h+1}, \cdots, \beta_t)$ 是在 $(t-h)$ 个生成元上的自由模 mod2，并且 $A = \pi_{n+2}(K_0^{n+1}) = (\alpha_{h+1}, \cdots, \alpha_m)$，于是 $\pi_{n+2}(K^{n+1})$ 是 B 对于 A 的一个扩张，应該注意到，事实上，$\pi_{n+2}(K^{n+1})$ 是直接和

---

1) 其实，我們是用 J. H. C. 威脫海特的論文 "On $\pi_r(V_{n,m})$ and sphere-bundles", *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), 48 (1949), 243—291 中的定理 8.

2) 我們认为 $\pi_r(S_{h+1}^n)$ 是由內射嵌入到 $\pi_r(K_0^{n+1})$.

$$\pi_{n+2}(S^n_{h+1} \cup e^{n+1}_{h+1}) + \cdots$$
$$+ \pi_{n+2}(S^n_t \cup e^{n+1}_t) + \pi_{n+2}(S^n_{t+1}) + \cdots + \pi_{n+2}(S^n_m)$$

而 $\pi_{n+2}(S^n_i \cup e^{n+1}_i)$ 是 (β_i) 对于 (α_i) 的一个扩张，$i = h+1, \cdots, t$. 我們不去決定羣扩张的性質[1]，因为在这里我們不需要它.

最后，我們計算 $\Gamma_{n+2}(K)$. 我們必需研究在 $\pi_{n+2}(K^{n+1})$ 上由附加 K 的 $(n+2)$ 維胞腔的影响. 虽然，这会带来一些困难. 因为，如立即可以看到的，附加每一个 $(n+2)$ 維胞腔 e^{n+2}_i，$i = 1, \cdots, m-h$，只是"消掉了"生成元 α_{h+i}；而且，自然地，$(n+2)$ 維球 S^{n+2}_j，$j = m-h+1, \cdots, q$ 的附加，不影响 $\Gamma_{n+2}(K)$. 这样我們从 $\pi_{n+2}(K^{n+1})$ 由"消掉"子羣 A 而得到 $\Gamma_{n+2}(K)$，从而 $\Gamma_{n+2}(K) \approx \approx B$. 另一方面，$H_n$ 是一个自由交換羣，一个有奇阶数的羣，以及是 $(t-h)$ 个偶阶数的循环羣的直接和，因此 $B \approx {}_2H_n$. 这就証明了定理.

4. 张素誠法复合形. 张素誠在他的論文"Homotopy invariants and continuous mappings"(*Proc. Roy. Soc. A*, 202 (1950), 253—263) 中，引进了新的数值不变量，第二撓系数，它們以及維数 $\leqslant n+2$，$n > 2$，有 $\pi_r(K) = 0$ $(1 \leqslant r < n)$ 的一个有限胞腔复合形 K[2] 的貝蒂 (Betti) 数和撓系数决定了 K 的同伦型. 这些第二撓系数可以从 K 的一个单純剖分来計算，而使张素誠能够对于一个和 K 有相同的同伦型的复合形来描述范式. 在这里我們不打算引进第二撓系数，而只定义一个法胞腔复合形.

一个法胞腔复合形由有限个数的具有一个公共点的初等复合形組成. 张素誠分初等复合形成七类，但我們将作更进一步的分类并且把初等复合形的十一个类型列在下面.

类型 1. S^n.

类型 2. S^{n+1}.

类型 3. S^{n+2}.

---

1) 实际上，如果 e^{n+1} 是由一个有偶度数 σ 的一个映象附加于 S^n，則当 4 除不尽 σ 时，有 $\pi_{n+2}(S^n \cup e^{n+1}) = Z_4$；4 除尽 σ 时，有 $\pi_{n+2}(S^n \cup e^{n+1}) = Z_2 + Z_2$.

1) 事实上，第二撓系数可以对于任意的有限复合形定义.

类型 4. $S^n \cup e^{n+1}$, 其中 e^{n+1} 是由一个度数为 2^q 的映象附加到 S^n, $q>0$.

类型 5. $S^n \cup e^{n+2}$,其中 e^{n+2} 是由一个度数为 p^q 的映象附加到 S^n, $q>0$, p 是一个奇素数。

类型 6. $S^n \cup e^{n+2}$, 其中 e^{n+2} 是由一个本性映象 $\dot{E}^{n+2} \to S^n$ 附加到 S^n.

类型 7. $S^n \cup e^{n+1} \cup e^{n+2}$,其中 $S^n \cup e^{n+1}$ 是类型 4, $S^n \cup e^{n+2}$ 是类型 6.

类型 8. $S^{n+1} \cup e^{n+2}$, 其中 e^{n+2} 是由一个度数为 $2^{q'}$ 的映象附加到 S^{n+1}, $q'>0$.

类型 9. $S^{n+1} \cup e^{n+2}$,其中 e^{n+2} 是由一个度数为 $p^{q'}$ 的映象附加到 S^{n+1}, $q'>0$, p 是一个奇素数.

类型 10. $S^n \cup S^{n+1} \cup e^{n+2}$, 其中 e^{n+2} 由一个映象附加到 $S^n \cup S^{n+1}$, 这一映象在 S^n 上是本性的并且在 S^{n+1} 上有度数 $2^{q'}$, $q'>0$.

类型 11. $S^n \cup e^{n+1} \cup S^{n+1} \cup e^{n+2}$, 其中 $S^n \cup e^{n+1}$ 是类型 4, 而 $S^n \cup S^{n+1} \cup e^{n+2}$ 是类型 10.

去計算 $\pi_{n+1}(K)$, 现在只需代替 K 以一个和它有相同的同伦型的一个法复合形,然后取它的組成的初等复合形的$(n+1)$次同伦羣的直接和. 第一运算需要第二挠系数(或者, 与之等价的,化归为范式的 γ, γ 是同态 $H_{n+2}(2) \to (H_n)_2$) 而第二运算可以基于下面的表,那里 K_i 代表类型 i 的一个标准复合形, Z_m 是阶 m 的一个循环羣:

$i=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\pi_{n+1}(K_i)=$	Z_2	Z_∞	0	Z_2	0	0	0	$Z_{2^{q'}}$	$Z_{p^{q'}}$	$Z_{2^{q'+1}}$	$Z_{2^{q'+1}}$

当然,这些結果都是定理 3.5 的特殊情形. $\pi_{n+1}(K)$ 这时正是組成的初等复合形的 $(n+1)$ 維同伦羣的直接和的一个事实需要加以証明, 不过究其实是第六章(4.3)和威脱海特同綸映象定理的一个容易的結果. 一般地誁,在对于任意的 r 計算 $\pi_r(K)$ 中,組成的初等复合形的那些 r 維同伦羣的直接和作为直接加項出現于

$\pi_r(K)$ 中，其余的直接加項作者称作为截項．这样，例如，如果 $r = n + 2$，当 $n > 3$[1] 时截項是零，当 $n = 3$ 时截項不等于零．

用初等复合形，定理 3.8 立即可以得出．我們把它重新証明如下：

定理 4.1. 如果 K 是一个維數 $\leqslant n + 2$，$n > 3$ 的有限胞腔复合形，使得 $\pi_r(K) = 0$，$r = 1, \cdots, n-1, n+1$，則

$$\pi_{n+2}(K) \approx H_{n+2}(K) + {}_2H_n(K).$$

設我們从开始取定 K 于范式中．于是它只包含类型 3,5,6 和 7 的組成的初等复合形，在这里我們将不再証明，事实上，$\pi_{n+2}(K)$ 是它的組成的初等复合形的 $(n+2)$ 維同伦羣的直接和，因为这是定理 4.2 的一个直接結果，而我們将要求証明所陈述的直接和是同构于 $H_{n+2}(K) + {}_2H_n(K)$．

假定 K 是由 k_i 个类型 i 的初等复合形的直接和，$i = 3, 5, 6, 7$．于是 $H_{n+2}(K)$ 是秩为 $(k_3 + k_6 + k_7)$ 的自由交换羣而 ${}_2H_n$ 是秩为 k_7 的一个自由模 mod2．

設 K_i 是类型 i 的初等复合形，$i = 1, \cdots, 11$．

我們現在証明

$$\text{(i)}\quad \pi_{n+2}(K_5) = 0,$$

$$\text{(ii)}\quad \pi_{n+2}(K_6) = Z_\infty,$$

$$\text{(iii)}\quad \pi_{n+2}(K_7) = Z_2 + Z_\infty.$$

(i) 的証明．这只需在 (3.10) 和 (3.11) 間簡化定理 3.8 的論証．

(ii) 的証明．我們能够再一次如定理 3.8 那样地論証．如果对于 e^{n+2} 的附加映象导出 $h_r: \pi_r(\dot{E}^{n+2}) \to \pi_r(S^n)$，則

$$h_{n+1}^{-1}(0) \approx \pi_{n+2}(K_6) - i\pi_{n+2}(S^n),$$

并且

$$i^{-1}(0) = h_{n+2}\pi_{n+2}(\dot{E}^{n+2}).$$

現在

1) 見定理 4.2.

$$h_{n+1}^{-1}(0) = 2\pi_{n+1}(S^{n+1}) = Z_\infty,$$

且

$$h_{n+2}\,\pi_{n+2}(\dot{E}^{n+2}) = \pi_{n+2}(S^n);$$

从而

$$i\pi_{n+2}(S^n) = 0 \text{ 和 } \pi_{n+2}(K_6) = Z_\infty.$$

(iii) 的証明．如果对于 e^{n+2} 的附加映象导出

$$h_r: \pi_r(\dot{E}^{n+2}) \to \pi_r(S^n \cup e^{n+1}),$$

则

$$h_{n+1}^{-1}(0) \approx \pi_{n+2}(K_7) - i\pi_{n+2}(S^n \cup e^{n+1}),$$

并且

$$i^{-1}(0) = h_{n+2}\,\pi_{n+2}(\dot{E}^{n+2}).$$

現在已証明了，在定理 3.8 的証明过程中，$\pi_{n+2}(S^n \cup e^{n+1})$ 包含 $\pi_{n+2}(S^n)$ 为它的一个子羣且商羣是 Z_2．由于

$$h_{n+2}\pi_{n+2}(\dot{E}^{n+2}) = \pi_{n+2}(S^n),$$

从而

$$i\pi_{n+2}(S^n \cup e^{n+1}) = Z_2,$$

同时

$$h_{n+1}^{-1}(0) = 2\pi_{n+1}(\dot{E}^{n+2}) = Z_\infty,$$

因此 $\pi_{n+2}(K_7)$ 是 Z_∞ 对于 Z_2 的一个扩张(且因此，是一个平凡扩张)．

最后，我們証明一个定理，它作为一个特殊情形，确立了这样的結果：$\pi_{n+2}(K)$ 就是它的組成复合形的 $(n+2)$ 次同伦羣的直接和．这一定理以及上面的 (i)，(ii)，(iii) 建立了定理 4.1．

定理 4.2. 設 $K_{(r)}$，$r = 1, \cdots, m$ 是一个有限胞腔复合形使得 $K_{(r)}^{n-1} = e_{(r)}^0$，並且設 K 是 $K_{(r)}$ 的併集且 $e_{(r)}^0$ 恆同于一个單独的頂点 e^0．倘若 $1 < s < 2n-1$，則 $\pi_s(K) = \sum \pi_s(K_{(r)})$．

設 $y_1, \cdots, y_m$ 是 m 个弧式連通的空間并且 y 是 y_i $(i = 1, \cdots, m)$ 的并集，在它們的每一个上有一个点恆同．然后据第四章定理 6.2 論証中的一个自然扩张，我們有

$$\pi_s(y) = \pi_s(y_1) + \cdots + \pi_s(y_m) + d\pi_{s+1}(y_1 \times \cdots \times y_m, y), \quad (4.3)$$

$$s \geqslant 2,$$

其中 $\pi_s(y_i)$ ($i = 1, \cdots, m$) 是由內射嵌入于 $\pi_s(y)$ 而 d 是通常的边緣同态，它在这一情形中是同构的．如果我們能够示明

$$\pi_{s+1}(K_{(1)} \times \cdots \times K_{(m)}, K) = 0, \text{ 当 } s+1 < 2n,$$

这时定理得証．

現在考慮 $K_{(1)} \times \cdots \times K_{(m)}$ 的胞腔剖分．它由 K 以及某些維数至少为 $2n$ 的附加的胞腔組成．設

$$f: I^{s+1}, \dot{I}^{s+1} \to K_{(1)} \times \cdots \times K_{(m)}, K$$

代表 α，它是 $\pi_{s+1}(K_{(1)} \times \cdots \times K_{(m)}, K)$ 的一个任意常数．我們可以把 I^{s+1} 表作胞腔 $e^0 \cup e^s \cup e^{s+1}$ 的并集，其中 $\dot{I}^{s+1} = e^0 \cup e^s$．于是据第七章定理 1.8，我們可以把 $f|\dot{I}^{s+1}$ 变形，使得 $\dot{I}^{s+1}$ 到 K 的合成映象是胞腔式的，因而当然在整个的形变中 $\dot{I}^{s+1}$ 保留于 K 中．这一个形变可以扩张为 f 的一个形变，因此我們可以在一开始就假定 $f|\dot{I}^{s+1}$ 是胞腔式的．于是我們可以形变 f 于一个胞腔式映象，保持 $f|\dot{I}^{s+1}$ 固定不变．如果 f' 是形变的結果，于是 f' 也仍代表 α 且

$$f'(I^{s+1}) \subset (K_{(1)} \times \cdots \times K_{(m)})^{s+1} \subset (K_{(1)} \times \cdots \times K_{(m)})^{2n-1},$$

因为 $s+1 < 2n$．不过，由于沒有維数是小于 $2n$ 的胞腔附加于 K 去形成 $K_{(1)} \times \cdots \times K_{(m)}$，从而 $(K_{(1)} \times \cdots \times K_{(m)})^{2n-1} \subset K$，因此 $f'(I^{s+1}) \subset K$ 并且 $\alpha = 0$．这就确立了定理．

定理 4.2 容許推广．这样 $K_{(r)}$ 可以由一个前 $(n-1)$ 个同伦羣为零的 CW-复合形代替．更普遍地，如果 $K_{(r)}$ 是一个 CW-复合形，它的前 $(n_r - 1)$ 个同伦羣为零，$n_r \geqslant 2$，倘若 $1 < s < N + N' - 1$，其中 N, N' 是集合 $\{n_1, \cdots, n_m\}$ 中的两个最小的数[1]，則 $\pi_s(K) = \Sigma \pi_s(K_{(r)})$．倘若我們給 K 以弱拓扑結构，我們可允許 $m = \infty$．J. H. C. 威脫海特示明了，如果 X 是一个弧式連通的拓扑空間，它的前 $(m-1)$ 个同伦羣是零，倘若 $1 < s < m + n - 1$，則

$$\pi_s(X \cup S^n) = \pi_s(X) + \pi_s(S^n),$$

而定理可以很快地扩张为这样一个定理，它由代替 S^n 以一个前 $n-1$ 个同伦羣为零的空間而得到．

1) 当然，我們可以有 $N = N'$．

5. 附录

初等复合形同伦羣的表[1)]

类型	π_{n+1}, $n\geqslant 3$	π_{n+2}, $n\geqslant 3$	π_{n+3}, $n\geqslant 5$	π_7, $n=4$	π_6, $n=3$
1	Z_2	Z_2	Z_{24}	$Z_\infty+Z_{12}$	Z_{12}
2	Z_∞	Z_2	Z_2	Z_2	Z_2
3	0	Z_∞	Z_2	Z_2	Z_2
4	Z_2	Z_4, $q=1$; Z_2+Z_2, $q>1$	$Z_{(2^q,24)}+Z_2$	$Z_{2^{q+1}}+Z_{(2^{q-1},12)}$	?
5	0	0	$Z_{(p^q,24)}$	$Z_{p^q}+Z_{(p^q,12)}$	?
6	0	Z_∞	Z_{12}	$Z_\infty+Z_6$	Z_6
7	0	Z_2+Z_∞	$Z_{(2^q,12)}+Z_2$	$Z_{2^{q+1}}+Z_{(2^{q-1},6)}+Z_2$	?
8	$Z_{2^{q'}}$	Z_2	Z_4, $q'=1$; Z_2+Z_2, $q'>1$	Z_4, $q'=1$; Z_2+Z_2, $q'>1$	Z_4, $q'=1$; Z_2+Z_2, $q'>1$
9	$Z_{p^{q'}}$	0	0	0	0
10	$Z_{2^{q'+1}}$	Z_2	$Z_{12}+Z_2$	$Z_\infty+Z_6+Z_2$	$Z_6+Z_2+Z_{2^{q'}}$
11	$Z_{2^{q'+1}}$	Z_2+Z_2	$Z_{(2^q,12)}+Z_2+Z_2$	$Z_{2^{q+1}}+Z_{(2^{q-1},6)}+Z_2+Z_2$	?

[Z_r = 阶 r 的循环羣；$(s,t)=s$, t 的最大公約数；如通常一样，十指直接和]。

[表中列出为未知的羣已經由 M. G. 巴雷脫計算过][2)]。

1) 对于 $\pi_{n+2}(K)$ 的結果，其中 K 是类型 4 的初等复合形，当 $q=1$ 的結果是属于 M. G. 巴雷脫和 G. F. 培奇特的；当 $q>1$ 是属于作者的。

J.-P. 色尔新近計算过 $\pi_{n+4}(S^n)$ 和 $\pi_{n+5}(S^n)$ 如下：

$$\pi_6(S^2)=Z_{12},\ \pi_7(S^3)=Z_2,\ \pi_8(S^4)=Z_2+Z_2,\ \pi_9(S^5)=Z_2,$$
$$\pi_{n+4}(S^n)=0,\ n\geqslant 6;$$
$$\pi_7(S^2)=Z_2,\ \pi_8(S^3)=Z_2,\ \pi_9(S^4)=Z_2+Z_2,\ \pi_{10}(S^5)=Z_2,$$
$$\pi_{11}(S^6)=Z_\infty,\ \pi_{n+5}(S^n)=0,\ n\geqslant 7$$

这些羣的生成元已經知道。

2) 注解已加在証明中。

参 考 文 献

（列在下面的书目和論文并沒有說是搜罗尽了有关同伦論的文献，而只是与本书內容有关的一些．同时，包含在有关同伦論較早期的一些論文中的結果已經由李夫希茲和史挺路德收集在許多书中，因此去参閱适当的书将会比查閱一些原始論文来得便利．在每一項目后方括号中的数字指的是与这一項目內容特别有关的本书的章次．）

書 目

Lefschetz, S., Introduction to Topology, No. II, *Princeton Mathematical Series*, Princeton University Press, 1949, [3]（这个工作本是一个专題的一般素材）．

Newman, M. H. A., Topology of Plane Sets, 2nd ed., C. U. P., 1951, [1]（作为同伦和形变概念的一个介紹）．

Seifert, H. and Threlfall, W., Lerbuch der Topologie, Teubner, Leipzig, 1934, [6]．（这是組合拓扑学的一本标准入門书．关于基本羣和复盖形的处理将会显得特别有用）．

Steenrod, N. E., Topology of Fibre Bundles, No. 14, *Princeton Mathematical Series*, Princeton University Press, 1951, [2,5,6]．

論 文

Barratt, M. G. and Paechter, G. F., Note on $\pi_r(V_{n,m})$, *Proc. Nat. Acad. Sci., Wash.*, 38 (1952), 119—121. [5, 6, 8].

Blakers, A. L. and Massey, W. S., The homotopy groups of a triad. I, *Ann. Math.* 53 (1951), 161—205, [2, 4].

Blakers, A. L. and Massey, W. S., The homotopy groups of a triad. II, *Ann. Math.* 55 (1952), 192—201, [2].

Chang, S. C., Homotopy invariants and continuous mappings, *Proc. Roy. Soc.* A, 202 (1950), 253—263, [8].

Chang, S. C., Some suspension theorems, *Quart. J. Math.* (Oxford), (2), 1 (1950), 310—317, [6].

Cobbe, Anne, Some algebraic properties of crossed modules, *Quart. J. Math.* (Oxford), (2), 2 (1951), 269—285, [4].

Cockcroft, W. H., The word problem in a group extension, *Quart. J. Math.* (Oxford), (2), 2 (1951), 123—134, [4].

Cockcroft, W. H., Note on a theorem by J. H. C. Whitehead, *Quart. J. Math.* (Oxford), (2), 2 (1951), 159—160, [4].

ECKMANN, B., Zur Homotopietheorie gefaserter Räume, *Comm. Math. Helv.* 14 (1942), 141—192, [5].

ECKMANN, B., Espaces Fibrés et Homotopie, *Colloque de Topologie* (Espaces Fibrés), Georges Thone, Liège (1951), pp. 83—99, [5].

EILENBERG, S. and MACLANE, S., Relations between homology and homotopy groups of spaces, *Ann. Math.*, 46 (1945), 480—509, [4, 5].

EILENBERG, S. and MACLANE, S., Relations between homology and homotopy groups of spaces, II, *Ann. Math.*, 51 (1950), 514—533, [4, 5].

EILENBERG, S. and STEENROD, N. E., Axiomatic approach to homology theory, *Proc. Nat. Acad. Sci., Wash.*, 31 (1945), 117—120, [4, 6].

FOX, R. H., On topologies for function spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51 (1945), 429—432, [5].

FREUDENTHAL, H., Über die Klassen von Sphärenabbildungen, I, *Comp. Math.*, 5 (1937), 299—314, [6].

HILTON, P. J., Calculating the homotopy groups of A_n^2-polyhedra, I, *Quart. J. Math.* (Oxford). (2), 1 (1950), 299—309, [8].

HILTON, P. J., Calculating the homotopy groups of A_n^2-polyhedra, II, *Quart. J. Math.* (Oxford), (2), 2 (1951), 228—240, [8].

HILTON, P. J., Suspension theorems and the generalized Hopfinvariant, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), 1 (1951), 462—493, [6, 8].

HOPF, H., Abbildungsklassen, *n*-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, 96 (1927), 209—224, [3].

HOPF, H., Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, 1, Neue Darstellung der Theorie des Abbildungsgrades, *Math. Ann.*, 100 (1928), 579—608, [3].

HOPF, H., Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, 2, Klasseninvarianten, *Math. Ann.*, 102 (1930), 562—623, [3].

HOPF, H., Über die Abbildungen der 3-Sphäre auf die Kugelfläche, *Math. Ann.*, 104 (1931), 637—665, [6].

HOPF, H., Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension, *Fundam. Math.*, 25 (1935), 427—440, [5, 6].

胡世楨, An exposition of the relative homotopy theory, *Duke J. Math.* 14 (1947), 991—1033, [2, 3, 4].

胡世楨, Inverse homomorphisms of the homotopy sequence, *K. Ned. Akad. van Wet.* (Indagationes Math.), 9, 2 (1947), 3—11, [4].

HUREWICZ, W., Beiträge zur Topologie der Deformationen, I–IV, *Proc. K. Akad. van* Wet. Amst., 38 (1935), 112—119, 521—528; 39 (1936), 117—226, 215—224, [2, 3].

HUREWICZ, W. and STEENROD, N. E., Homotopy relations in fibre spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci., Wash.*, 27 (1941), 60—64, [5].

MACLANE, S. and WHITEHEAD, J. H. C., On the 3-type of a complex, *Proc. Nat. Acad. Sci., Wash.*, 36 (1950), 41—48, [7].

PONTRJAGIN, L. S., Homotopy classification of mappings of the $(n+2)$-sphere into the *n*-sphere, *Doklady akad. Nauk SSSR*, 70 (1950), 957—959, [6].

POSTNIKOV, M. M., 1. Determination of the homology groups of a space by means of homotopy invariants, 2. On the homotopy type of polyhedra, 3. On the classification of continuous mappings, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 1951, Tom 76, 3, 359—362, Tom 76, 6, 789—791, Tom 79; 4; 573—576; [7].

SERRE, J. -P., Homologie Singulière des Espaces Fibrés, *Ann. Math.*, 54 (1951), 425—505, [5, 7, 8].

SERRE, J. -P., Sur la Suspension de Freudenthal, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 234 (1952), 1340—1342, [6, 8].

STEENROD, N. E. and WHITEHEAD, J. H. C., Vector fields on the n-sphere, *Proc. Nat. Acad. Sci., Wash.*, 37 (1951), 58—63; [6].

WHITEHEAD, G. W., A generalization of the Hopf invariant, *Ann. Math.*, 51 (1950), 192—238, [2, 6].

WHITEHEAD, G. W., On the $(n+2)$nd homotopy group of the n-sphere, Ann. *Math.*, 52 (1950), 245—247, [6].

WHITEHEAD, J. H. C., On adding relations to homotopy groups, *Ann. Math.*, 42 (1941), 409—428, [2, 6].

WHITEHEAD, J. H. C., On π_r $(V_{n,m})$ and sphere-bundles, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 48 (1944), 243—291, [4, 5, 6, 8].

WHITEHEAD, J. H. C., The homotopy type of a special kind of polyhedron, *Ann. Soc. Polon. Math.*, 21 (1948), 176—186, [8].

WHITEHEAD, J. H. C., On simply-connected 4-dimensional polyhedra, *Comm. Math. Helv.*, 22 (1949), 48—92, [7, 8].

WHITEHEAD, J. H. C., Combinatorial homotopy, I, *Bull. Amer, Math. Soc.*, 55, 3 (1949), 213—245, [7].

WHITEHEAD, J. H. C., Combinatorial homotopy, II, *Bull. Amer, Math. Soc.*, 55, 5 (1949), 453—496, [4, 7].

WHITEHEAD, J. H. C., A certain exact sequence, *Ann. Math.*, 52 (1950), 51—110, [7, 8].

名 詞 索 引

三 划

四 划

五 划

六 划

七　划

八 划

九 划

十　划

十 一 划

十二划

十三划

十四划

十五划

十六划

十 七 划

十 九 划